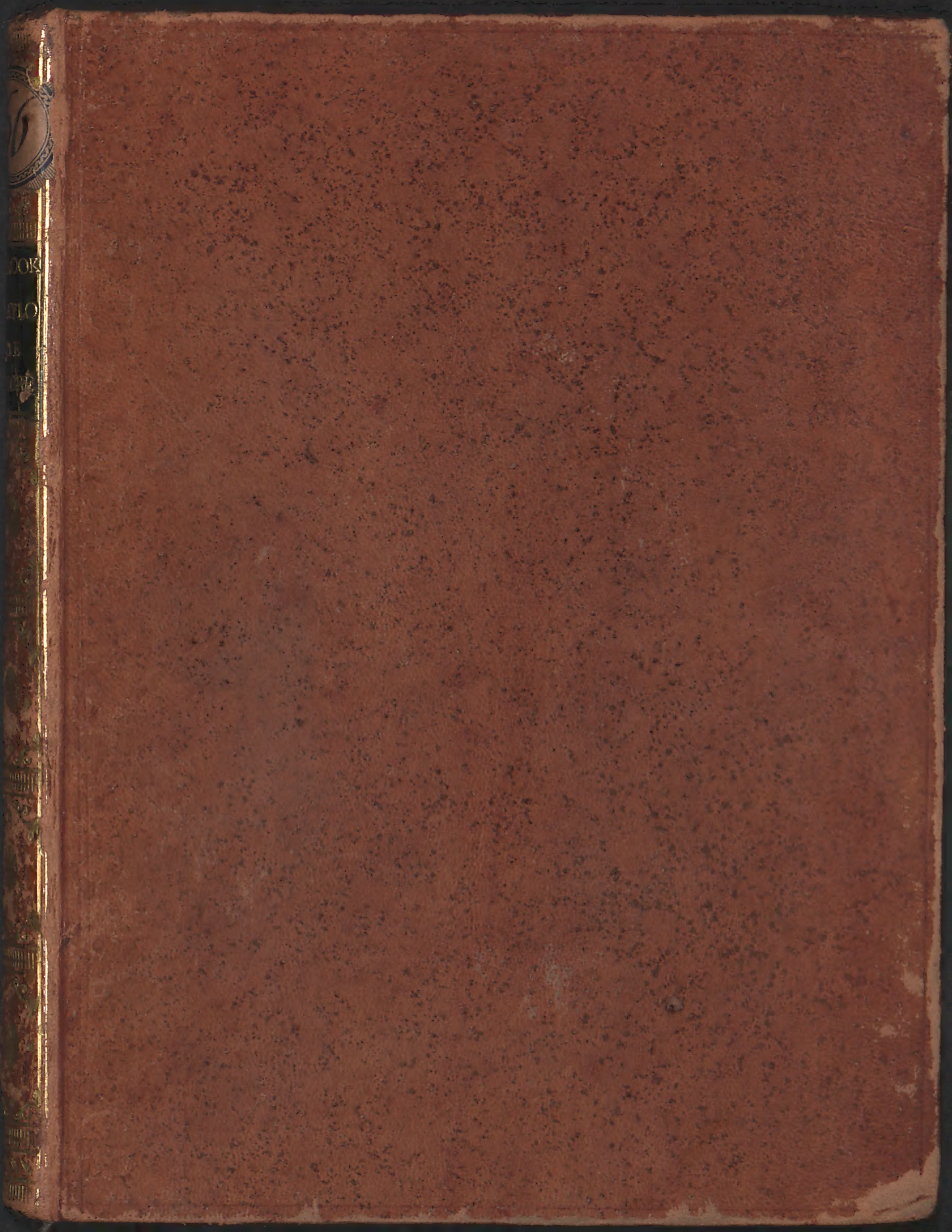



QVI
RERVM
CAVSAS
ΟΜΗΡΟΣ
Thomae e Com.tis Valpergiae et Maxini


REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
PLANA VI 66



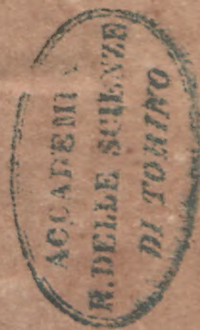
METHODUS Incrementorum Directa & Inversa.

AUCTORE

BROOK TAYLOR, LL. D. &

Regiæ Societatis Secretario.





LONDINI

Typis *Pearsonianis*: Proſtant apud *Gul. Innys* ad Inſignia Principis in Cœmeterio *Paulino*. MDCCXV.

ILLUSTRISSIMÆ

Societati Regali,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

Ad Philosophiam Promovendam

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

BROOK TAYLOR.

LECTORI.

IN Methodo hâc Incrementorum quantitates considero ut Incrementis auctas vel Decrementis imminutas, & ex datis relationibus Integralium quæro relationes Incrementorum, atque vicissim ex datis relationibus Incrementorum quæro quantitates ipsas Integrales. Horum usus in rebus Mathematicis satis latè patet; sed in eo maximè elucet, quod hinc facile deriventur omnes proprietates Fluxionum. Clarissimus Dominus Newtonus quantitates Mathematicas considerando ut motu perpetuo descriptas, per Methodum Fluxionum ex rationibus primis Incrementorum nascentium quærit rationes velocitatum quibus magnitudines describuntur, & vicissim ex velocitatibus hisce (quas Fluxiones quantitatum vocat) quærit magnitudines quantitatum ipsarum descriptarum. Hoc idem, sed minus generaliter, fecere alii (ut Veteres in Methodo exhaustionum, Cavallerius & Wallisius in Methodis summatoriis.) Veteres investigando magnitudines figurarum inscripserunt & circumscripserunt figuras ex partibus finitis & cognitis constantes, & partium istarum numerum auxerunt & magnitudinem minuerunt, donec differentia inter earum summam & figuram quæsitam esset minor quâvis datâ. Cavallerius & Recentiores contemplarunt partes istas ut in infinitum diminutas. Sed hi omnes, contemplando geneses quantitatum per additiones partium, non satis consuluerunt severæ isti ἀκριβείᾳ Geometrarum. Partes enim, ut Methodus sit accurata, deberent esse primæ nascentes; at nullæ sunt ejusmodi partes in rerum Naturâ, sunt tantum rationes primæ partium nascentium. Ergò Newtonus missis partium magnitudinibus, missis & earum summis, rationes ultimas partium evanescentium, & primas nascentium introduxit, & in his rationibus Analysin suam fundavit. Sumptis itaque ra-

tionibus primis Incrementorum naſcentium, vel ultimis evaneſcentium, accommodantur omnes Concluſiones Methodi Incrementorum ad Methodum Fluxionum, Incrementis jam evaneſcentibus, & Integralibus in fluentes converſis. Et hoc pacto vitatur omnis conſideratio quantitatum infinitè (ſeu, ut aliqui loqui amant, indefinitè) parvarum. Nam in Methodo Fluxionum, ut Concluſiones ſint veræ & omnino accuratæ, partes ſeu incrementa concipienda ſunt, non ut perexigua, ſeu infinitè parva, ſed ut reverâ nulla: Rationes enim primæ non ſunt, niſi in ipſo momento ubi quantitates naſci incipiunt; ubi ſemel naſcuntur jam deſinunt eſſe primæ. Similiter & rationes ultimæ non ſunt, niſi ubi quantitates jam evaneſcunt & fiunt nullæ. Facilioris tamen conceptûs gratiâ poſſunt pro Flxionibus ſumi augmenta illa naſcentia, quæ Newtonus *momenta vocat, atque deſignat literâ o Fluxionibus appoſitâ. Et in hoc modo concipiendi facilius cernitur relatio inter Methodum hanc Incrementorum & Methodum Fluxionum. Quapropter etiam in Propoſitionibus nonnullis generalibus ſpectantibus ad Incrementa quævis in genere, vel finitæ magnitudenis, vel infinitè parvæ, exempla damus in Fluxionibus, vice tamen Fluxionum ſumendo momenta.*

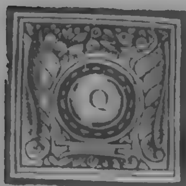
Methodus

Methodus Incrementorum.

PARS PRIMA.

Ubi traduntur Præcepta, cùm Methodi Incrementorum in genere, tùm Methodi Fluxionum.

INTRODUCTIO.



Uantitates indeterminatas in his considero ut Incrementis perpetuò auctas, vel Decrementis diminutas. Indeterminatas ipsas Integrales designo literis z, x, v, &c. earumque Incrementa, seu partes mox addendas designo iisdem literis a parte inferiori punctatis $\underset{\cdot}{z}$, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{v}$, &c. Quorum Incrementorum Incrementa, seu Integralium ipsarum Incrementa secunda designo iisdem literis bis punctatis $\underset{\cdot\cdot}{z}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. Incrementa tertia designo literis ter punctatis $\underset{\because}{z}$, $\underset{\because}{x}$, $\underset{\because}{v}$, &c. & sic porrò. Quinetiam majoris generalitatis gratiâ, vice punctorum nonnunquam scribo characteres punctorum numeros designantes: Sic si n sit 3, per $\underset{n}{x}$, vel $\underset{3}{x}$ designatur $\underset{\because}{x}$; si n sit o, per $\underset{n}{x}$, vel $\underset{o}{x}$ designatur ipsa Integralis x; si n sit -1, per $\underset{n}{x}$, seu $\underset{-1}{x}$ designatur quantitas cujus Incrementum primum est x; & sic de cæteris. Sæpè etiam in hoc Tractatu quantitatis ejusdem variabilis valores aliquot successivos designo per eandem literam lineolis insig-

insignitam; nempe præsentem valorem designando per literam simplicem, præcedentes per accentus graves suprascriptos, & subsequentes per lineolas subscriptas. Sic exempli gratiâ sunt $\overset{\backprime\backprime}{x}$, $\overset{\backprime}{x}$, x, $\underset{\backprime}{x}$, $\underset{\backprime\backprime}{x}$, ejusdem quantitatis valores quinque successivi, quorum est x valor præsens, sunt $\overset{\backprime}{x}$ & $\overset{\backprime\backprime}{x}$ valores præcedentes, atque $\underset{\backprime}{x}$ & $\underset{\backprime\backprime}{x}$ valores subsequentes.

II. Fluxiones, quæ sunt in ratione primâ Incrementorum nascentium, vel ultimâ evanescentium, designantur punctis indicibus Incrementorum ad literarum partes superiores transpositis: Sic est $\dot{x}$ Fluxio prima ipsius x; $\ddot{x}$ est ejusdem Fluxio secunda; $\dddot{x}$ Fluxio tertia; & sic porrò. Fluentes etiam nonnunquam designantur per lineolas (similes accentûs acuti) literis suprascriptas: Sic $\acute{x}$ designat fluentem ipsius x, seu quantitatem cujus Fluxio prima est x; $\overset{\prime\prime}{x}$ designat fluentem secundam ipsius x, seu quantitatem cujus Fluxio secunda est x; & sic porrò. Et hæ lineolæ in indicibus fluentûm vim habent punctorum (ut ita dicam) negativorum in indicibus Fluxionum: Sic si sit $n=2$, & $\overset{n}{x}$ designet $\ddot{x}$, mutato signo designabitur $\overset{\prime\prime}{x}$ per $\overset{-n}{x}$. Porrò fluentes quantitatum compositarum designantur nonnunquam per quantitates ipsas parallelogrammis inclusas; sic designat $\boxed{xz^2}$ fluentem ipsius xz^2.

PROP. I. PROB. I.

Datâ Æquatione quantitates variabiles involvente invenire Incrementa.

IN Æquatione propositâ vice quantitatis cujusvis variabilis scribe eandem quantitatem proprio Incremento auctam, & resultabit Æquatio nova; unde ablatâ Æquatione priori, residuum erit Æquatio, per quam dabitur relatio Incrementorum.

Exempli gratiâ sit Æquatio $x^3 - xv^2 + a^2z - b^3 = o$, ubi a & b sunt quantitates determinatæ & immutabiles. Itaque pro x, v, & z scriptis $x + \underset{\cdot}{x}$, $v + \underset{\cdot}{v}$, & $z + \underset{\cdot}{z}$, prodit Æquatio nova $x^3 + 3\underset{\cdot}{x}x^2 + 3x^2\underset{\cdot}{x}$ $+ \underset{\cdot}{x}^3 - xv^2 - \underset{\cdot}{x}v^2 - 2xv\underset{\cdot}{v} - x\underset{\cdot}{v}^2 - 2\underset{\cdot}{x}v\underset{\cdot}{v} - \underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{v}^2 + a^2z + a^2\underset{\cdot}{z}$ $- b^3 = o$; unde subductâ Æquatione priori, residuum $3\underset{\cdot}{x}x^2 + 3x^2\underset{\cdot}{x}$ $+ \underset{\cdot}{x}^3 - \underset{\cdot}{x}v^2 - 2xv\underset{\cdot}{v} - x\underset{\cdot}{v}^2 - 2\underset{\cdot}{x}v\underset{\cdot}{v} - \underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{v}^2 + a^2\underset{\cdot}{z} = o$ fit Æquatio, cujus ope dantur relationes Incrementorum.

In hâc Solutione, si pro Incrementis nascentibus scribatur nihil, & pro earum rationibus primis substituantur rationes Fluxionum, eo pacto dabuntur relationes Fluxionum. Et potest operatio simul & semel perfici, ab initio neglectis terminis, cùm Æquationis propositæ, tùm & ob Incrementa nascentia evanescentibus, omninò ut docetur in Regulâ *Newtonianâ*, quæ hæc est;

" Multiplicetur omnis Æquationis terminus per indicem
" dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, &
" in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus
" in Fluxionem suam; & aggregatum factorum sub pro-
" priis signis erit Æquatio nova, per quam definietur
" relatio Fluxionum.

EXPLICATIO.

" Sunto a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & im-
" mutabiles, & proponatur Æquatio quævis quantitates fluen-

 " tes

" tes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = o$. Multi-
" plicentur termini primò per indices dignitatûm x, & in singulis
" multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis,
" scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y,
" & prodibit $- 2x\dot{y}y$. Idem fiat in z, & prodibit $a^2\dot{z}$. Ponatur
" summa factorum æqualis nihilo, & habebitur Æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$
" $- 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = o$.

" Ad eundem modum si Æquatio esset $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - y^2}$
" $- b^3 = o$ produceretur $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{\sqrt{ax - y^2}} = o$.
" Ubi si Fluxionem $\dot{\sqrt{ax - y^2}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - y^2} = z$, &
" erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Prop.) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, seu
" $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$, hoc est $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = \dot{\sqrt{ax - y^2}}$. Et inde $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$
" $- 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = o$.

Per operationem repetitam pergitur ad Incrementa, ut & ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes. Sit Æquatio $xz - av = o$. Tum per operationem primam erit $\underset{\cdot}{x}z + x\underset{\cdot}{z} + \underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{z} - a\underset{\cdot}{v} = o$. In hâc Æquatione pro x, $\underset{\cdot}{x}$, z, $\underset{\cdot}{z}$, v, $\underset{\cdot}{v}$ scriptis $x + \underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x}$, $z + \underset{\cdot}{z}$, $\underset{\cdot}{z} + \underset{\cdot\cdot}{z}$, $v + \underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot}{v} + \underset{\cdot\cdot}{v}$, & subductâ Æquatione, per operationem secundam fiet $2\underset{\cdot}{x}\underset{\cdot}{z} + \underset{\cdot\cdot}{x}z + 2\underset{\cdot\cdot}{x}\underset{\cdot}{z} + x\underset{\cdot\cdot}{z} + 2\underset{\cdot}{x}\underset{\cdot\cdot}{z} + \underset{\cdot\cdot}{x}\underset{\cdot\cdot}{z} - a\underset{\cdot\cdot}{v} = o$. Sic in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, fiet per operationem primam $\dot{x}z + x\dot{z} - a\dot{v} = o$, per secundam $2\dot{x}\dot{z} + \ddot{x}z + x\ddot{z} - a\ddot{v} = o$. Et sic pergere licet ad Incrementa, & ad Fluxiones tertias, quartas, & sequentes.

Sed ubi hoc modo pergitur ad Incrementa, vel ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes, convenit quantitatem aliquam considerare ut uniformiter crescentem, & pro ejus Incrementis, vel Fluxionibus, secundâ, tertiâ, & sequentibus scribere nihil. Sic in Æquatione modò propositâ $xz - av = o$, uniformiter crescente z, erit

per

per operationem secundam $2\underset{.}{x}\underset{.}{z} + \underset{..}{x}z + 2\underset{..}{x}\underset{.}{z} - a\underset{..}{v} = o$. Et in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, erit per operationem secundam $2\dot{x}\dot{z} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = o$, per tertiam $3\ddot{x}\dot{z} + \dddot{x}z - a\dddot{v} = o$. Et in hoc casu potest commodè pro Fluxione datâ $\dot{z}$ scribi 1. Hoc pacto Æquationes prædictæ fiunt $\dot{x}z + x - a\dot{v} = o$, $2\dot{x} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = o$, $3\ddot{x} + \dddot{x}z - a\dddot{v} = o$.

PROP. II. PROB. II.

In Æquatione incrementali variabiles quotvis involvente, vice omnium istarum Variabilium substituere totidem novas per eadem Incrementa in ordine inverso crescentes.

SIT x quævis variabilium in Æquatione propositâ, & v nova variabilis in ejus locum substituenda; ita ut dum augetur x, minuatur v per eadem Incrementa. Tum si sit n index infimi Incrementi in Æquatione propositâ, satisfiet Problemati pro x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. scribendo sequentes ipsorum valores; ubi est d quantitas determinata ad libitum sumpta,

$$x = d - v - nv - \frac{n.\overline{n-1}}{2}\underset{..}{v} - \frac{n.\overline{n-1}}{2}.\frac{n-2}{3}\underset{\because}{v} - \&c.$$

$$\underset{.}{x} = \underset{.}{v} + \overline{n-1}\underset{..}{v} + \frac{\overline{n-1}.n-2}{2}\underset{\because}{v} + \frac{\overline{n-1}.n\;2}{2}.\frac{n-3}{3}\underset{::}{v} + \&c.$$

$$\underset{..}{x} = -\underset{..}{v} - \overline{n-2}\underset{\because}{v} - \frac{\overline{n-2}.n-3}{2}\underset{::}{v} - \&c.$$

$$\underset{\because}{x} = \underset{\because}{v} + \overline{n-3}\underset{\because}{v} + \&c.$$

& sic porrò.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

	A.	*B.*
1.	x - - - - -	$v + 3\dot{v} + 3\ddot{v} + \dddot{v}$
2.	$x + \dot{x}$ - - - -	$v + 2\dot{v} + \ddot{v}$
3.	$x + 2\dot{x} + \ddot{x}$ - -	$v + \dot{v}$
4.	$x + 3\dot{x} + 3\ddot{x} + \dddot{x}$	v

Sit verbi gratiâ $n = 3$, & in tabulis *A* & *B* exhibeantur quatuor valores correſpondentes ipſorum x & v in contrario ordine creſcentium; qui per additionem Incrementorum facilè colliguntur. Tum quoniam ex Hypotheſi Incrementa correſpondentia in utrâque tabulâ ſunt ſemper æqualia, dabitur ſumma duorum quorumvis valorum correſpondentium x & v in his tabulis. Quare ſi ſumma iſta data ſit d, erit

$$x = d - v - 3\dot{v} - 3\ddot{v} - \dddot{v}$$
$$x + \dot{x} = d - v - 2\dot{v} - \ddot{v}$$
$$x + 2\dot{x} + \ddot{x} = d - v - \dot{v}$$
$$x + 3\dot{x} + 3\ddot{x} + \dddot{x} = d - v$$

Tum ſumendo Differentias harum Æquationum fit

$$\dot{x} = \dot{v} + 2\ddot{v} + \dddot{v}$$
$$\dot{x} + \ddot{x} = \dot{v} + \ddot{v}$$
$$\dot{x} + 2\ddot{x} + \dddot{x} = \dot{v}$$

Et ſumendo Differentias harum Æquationum fit

$$\ddot{x} = -\ddot{v} - \dddot{v}$$
$$\ddot{x} + \dddot{x} = -\ddot{v}$$

Denique

Denique ſumendo Differentias harum Æquationum fit $\underset{\because}{x} = \underset{\because}{v}$. Sed hi valores ipſorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\because}{x}$, iidem ſunt, ac in ſolutione jubentur; & eadem eſt argumentatio ubi eſt n alterius cujuſvis valoris. Quare pro ſingulis x, & ſuis Incrementis ſubſtituendo hujuſmodi valores, rectè ſolvitur Problema. Q. E. D.

COROL.

Ob Incrementa evaneſcentia in Fluxionibus Solutio fit ſimplicior, exiſtente $x = d - v$, $\dot{x} = \dot{v}$, $\ddot{x} = -\ddot{v}$, $\dddot{x} = \dddot{v}$, $\ddddot{x} = -\ddddot{v}$, & ſic porrò.

SCHOLIUM.

Poſſunt equidem Æquationes incrementales pro lubitu transformari ope Æquationum aſſumptarum. Sic ſi feceris $x = vv$, capiendo Incrementa (per Prop. I.) erit $\underset{\cdot}{x} = 2v\underset{\cdot}{v} + \underset{\cdot}{v}\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{x} = 2v\underset{\cdot\cdot}{v} + 4\underset{\cdot}{v}\underset{\cdot\cdot}{v} + \underset{\cdot\cdot}{v}\underset{\cdot\cdot}{v}$, & ſic porrò, unde transformabitur Æquatio pro x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. ſubſtituendo hos ipſorum valores. Idem fiet ſi ſit $x = d - v$. Sed in hoc caſu quoniam eſt $\underset{\cdot}{x} = -\underset{\cdot}{v}$, erit $\underset{\cdot}{v}$ quantitas negativa; quare quantitas ſubſtituta v non erit quantitas reverâ increſcens in Æquatione transformatâ, ſed decreſcens, exiſtente $\underset{\cdot}{v}$ ipſius Decremento proximè auferendo. Proinde ſi cupis Æquationem ita transformare, ut quantitates v decreſcant creſcentibus x, & tamen in Æquatione transformatâ ſint $\underset{\cdot}{v}$ ipſarum v vera Incrementa, ut ſunt $\underset{\cdot}{x}$ vera Incrementa ipſius x, procedendum erit per hanc Propoſitionem.

PROP. III. PROB. III.

Æquationem fluxionalem, in quâ sunt fluentes tantùm duæ z & x, quarum z fluit uniformiter, ita transformare ut fluat x uniformiter.

SOlvitur Problema pro $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, &c. substituendo sequentes ipsorum valores, nempe $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}$, $\dddot{x} = \frac{-\dddot{z}\dot{z}\dot{x} + 3\ddot{z}^2\dot{x}}{\dot{z}^2}$, $\ddddot{x} = \frac{-\ddddot{z}\dot{z}^2\dot{x} + 10\dddot{z}\ddot{z}\dot{z}\dot{x} - 15\ddot{z}^3\dot{x}}{\dot{z}^3}$, &c.

DEMONSTRATIO.

Sunto A, B, C, D, E, &c. quantitates ex x & datis compositæ, & sint $\dot{A} = B\dot{x}$, $\dot{B} = C\dot{x}$, $\dot{C} = D\dot{x}$, $\dot{D} = E\dot{x}$, & sic porrò. Tum si ponatur $z = A$, erit $\dot{z} = B\dot{x}$ & (fluente uniformiter z,) $0 = (B\ddot{x} + \dot{B}\dot{x} =)\ B\ddot{x} + C\dot{x}^2$, $0 = (B\dddot{x} + \dot{B}\ddot{x} + 2C\dot{x}\ddot{x} + \dot{C}\dot{x}^2 =)\ B\dddot{x} + 3C\dot{x}\ddot{x} + D\dot{x}^3$, $0 = B\ddddot{x} + 4C\dot{x}\dddot{x} + 3C\ddot{x}^2 + 6D\dot{x}^2\ddot{x} + E\dot{x}^4$, & sic porro (per Prop. 1.) Sed ubi fluit uniformiter x, & fluit inequaliter z, sunt $B = \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, $C = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^2}$, $D = \frac{\dddot{z}}{\dot{x}^3}$, $E = \frac{\ddddot{z}}{\dot{x}^4}$, &c. Itaque pro B, C, D, E, &c. scriptis his ipsorum valoribus, invenientur ipsorum $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, &c. valores, ut suprà exhibentur. Quibus proinde in Æquatione substitutis, deinde fluet x uniformiter, atque z inequaliter. Q. E. D.

SCHO.

SCHOLIUM.

Et eodem modo transformari potest Æquatio, quæ plures fluentes involvit v, y, &c. præter z & x; modò nullius v, y, &c. Fluxio ultra primam in Æquatione involvatur. Quare si in Æquatione, quam per hanc Propositionem transformare velis, sint quædam ipsorum v, y, &c. Fluxiones secundæ, tertiæ, & sequentes, primùm eliminandæ sunt Fluxiones istæ ope Æquationum datarum, & deinde procedet transformatio per hanc Propositionem facta.

PROP. IV. THEOR. I.

Datâ Æquatione præter variabilem z, cujus valores omnes dantur, involvente alterius variabilis x Incrementa aliquot x_{m}, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. quarum prima sit x_{m}, & ultima x_{m+n}, (ubi etiam deesse possunt z, & omnia Incrementa x_{m+1}, x_{m+2}, &c. inter x_{m} & x_{m+n} mediæ;) atque datis præterea $m+n$ conditionibus spectantibus ad $m+n$ datos valores z, & ad totidem valores correspondentes quovis modo sumptos inter valores ipsorum x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, &c. in infinitum; ita tamen ut non plures quam n valores sumantur ipsius x_{m}, vel x_{m+1}, vel cujusvis Incrementi inferioris, vel inter plura Incrementa x_{m}, x_{m+1}, x_{m+2}, & inferiora; nec plures quam $n+1$ valores sumantur ipsius x_{m-1}; nec plures quam $n+2$ valores sumantur ipsius x_{m-2}; atque sic deinceps; dabuntur omnes valores ipsius x ex datis omnibus valoribus z.

D E-

DEMONSTRATIO.

Per Æquationem datam datur x_{m+n} expressa per z & per Incrementa x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. ipso x_{m+n} superiora. Unde (per Prop. 1.) dabitur proximum Incrementum x_{m+n+1} per easdem quantitates expressum; deinde (per eandem Propositionem) dabitur proximum Incrementum x_{m+n+2} per easdem quantitates expressum; & operationibus in infinitum continuatis dabuntur omnia Incrementa ipso x_{m+n} inferiora expressa per easdem quantitates z, & per Incrementa x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. ipso x_{m+n} superiora. Si itaque sint a, & c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$, &c. ipsorum z, & x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, &c. certi quidam valores correspondentes, dabuntur omnia c_{m+n}, c_{m+n+1}, c_{m+n+2}, &c. in infinitum expressa per a, & c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, &c. ipso c_{m+n} superiora. Unde per additionem continuam dabuntur omnes valores ipsius x_m in tabulâ antè continuatâ. Et pro z & x substitutis novis variabilibus (per Prop. 2.) eodem modo dabuntur omnes valores x_m in tabulâ retrò continuatâ. Deinde per additionem & subductionem continuam dabuntur omnes valores Incrementi proximè superioris x_{m-1}, expressi per easdem quantitates, & per c_{m-1}: Et deinde eodem modo dabuntur omnes valores Incrementi adhuc superioris x_{m-2} expressi per easdem quantitates & per c_{m-2}. Et sic pergendo dabuntur tandem omnes

valores

valores ipsius x expressi per a & per terminos c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. ipso c_{m+n} superiores. Sed terminorum c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. ante c_{m+n} numerus est $m+n$. Quare per conditiones numero $m+n$ determinabuntur omnes c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. adeoque dabuntur omnes x. Q. E. D. Sed quoniam valores ipsorum x_{m}, x_{m+1}, x_{m+2}, &c. includunt terminos tantùm c_{m}, c_{m+1}, c_{m+2}, &c. quorum numerus est tantùm n; ergò nequeunt plures quam n conditiones applicari ad valores Incrementi x_{m} & inferiorum. Item quoniam valores ipsius x_{m-1} includunt terminos tantùm c_{m-1}, c_{m}, c_{m+1}, &c. quorum numerus est tantùm $n+1$, nequeunt plures conditiones quam $n+1$ applicari ad valores Incrementi x_{m-1}: Et similis est argumentatio in cæteris. Unde per hoc Theorema rectè determinantur data, & eorum conditiones, in Æquationibus duas tantùm Integrales & earum Incrementa involventibus.

PROP. V. THEOR. II.

Datis duabus Æquationibus, præter z, cujus valores omnes dantur, involventibus ipsorum v & x Incrementa aliquot, quorum suprema in utrâque Æquatione sint v_p & x_π, & infima in unâ Æquatione sint v_{p+a}, & $x_{\pi+\alpha}$, & infima in alterâ Æquatione sint v_{p+b}, & $x_{\pi+\beta}$; si sit m numerorum $a+\beta$ & $\alpha+b$ maximus, dabuntur omnes v per conditiones numero $m+p$ spectantes ad $m+p$ valores ipsius z, & ad totidem valores respondentes ipsorum v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. & x_π, $x_{\pi+1}$, $x_{\pi+2}$, &c. atque dabuntur omnes x per conditiones numero $m+\pi$ spectantes ad $m+\pi$ valores ipsius z, & ad totidem valores respondentes ipsorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. & v_p, v_{p+1}, v_{p+2}, &c. Ita quidem ut conditionum numerus non amplius m applicari possit ad valores Incrementorum v_p & x_π, & inferiorum, reliquis conditionibus applicandis ad valores ipsorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. ipsis x_π & v_p superiorum juxta leges valorum Incrementorum ipsâ x_m superiorum in Propositione quartâ, hoc est, ut ad minimum unus valor sit ipsius x, duo valores sint ipsorum x & $\underset{\cdot}{x}$, tres valores sint ipsorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$; & sic de v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. atque deinceps.

DE.

DEMONSTRATIO.

Nam per Æquationes datas, & per Æquationes novas inde derivatas (per Prop. 1.) eliminato v cum suis Incrementis, dabitur Æquatio præter z involvens tantùm Incrementa ipsius x, quorum supremum est x_{π}, & infimum est $x_{\pi+m}$. Et proximè antè inventam Æquationem istam dabitur Æquatio præter z & ipsius x Incrementa x_{π} & inferiora, involvens tantùm v_{p}. Unde dabitur v_{p} expressum per z, & per ipsius x Incrementa x_{π} & inferiora. Sed si sint a, & c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, &c. ipsorum z, & x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, &c. valores quidam correspondentes, dabuntur omnia Incrementa x_{π} & inferiora expressa per a, & per ipsorum c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. numerum m (per Prop. 4.) Quare etiam dabuntur omnia v_{p} per easdem quantitates expressa. Unde si sint d, $\underset{.}{d}$, $\underset{..}{d}$, &c. ipsorum v, $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{v}$, &c. valores ipsius z valori a respondentes, & continuetur series d, $\underset{.}{d}$, $\underset{..}{d}$, &c. usque d_{p-1} inclusivè, ut sit terminorum numerus p, dabuntur omnes v expressæ per quantitates d, $\underset{.}{d}$, $\underset{..}{d}$, &c. & c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. quorum omnium numerus est $m+p$. Exprimentur autem omnes valores ipsius x per quantitates c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, &c. quarum numerus est $m+\pi$. Quare determinatis omnibus c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, &c. per conditiones numero $m+\pi$ spectantes ad valores x & suorum Incrementorum; deinde determinabuntur omnes d, $\underset{.}{d}$, $\underset{..}{d}$, &c. per alias conditiones numero p spectantes ad valores ipsorum v, $\underset{.}{v}$, $\underset{..}{v}$, &c. vel deter-

minatis

minatis omnibus d, $\underset{\cdot}{d}$, $\underset{\cdot\cdot}{d}$, &c. & aliquot ex terminis c_{π}, $c_{\pi+1}$, $c_{\pi+2}$, &c. per conditiones spectantes ad valores v, $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. reliqui terminorum c, $\underset{\cdot}{c}$, $\underset{\cdot\cdot}{c}$, &c. determinabuntur per conditiones spectantes ad valores x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. Unde per conditiones $m+p$ dabuntur omnes v, & per conditiones $m+\pi$ dabuntur omnes x, (Q. E. D.) & per conditiones omninò $m+p+\pi$ dabuntur omnes cùm v, tùm x. Quomodo autem conditiones applicandæ sint ad valores v & x, & suorum Incrementorum ipsis v_{p} & x_{π} superiorum, satis constat ex Propositione quartâ.

SCHOLIUM.

Ad eundem modum per eliminationes variabilium etiam pergere licet ad inventionem conditionum, quibus astringi possunt tres, vel quatuor, vel plures Æquationes incrementales involventes tres, vel quatuor, vel plures variabiles præter z, cujus valores omnes dantur.

Sit Æquatio $z^2\underset{\cdot\cdot}{x} - zx + b^3 = o$. In hâc Æquatione ad mentem Propositionis quartæ est $\overset{4}{\underset{\cdot\cdot}{x}}$ idem ac x_{m}, atque $\overset{}{x}_{4}$ idem ac x_{m+n}; unde sunt $m=2$, & $n=2$. Quare per conditiones quatuor dabuntur omnes x, ex datis omnibus z. Et quoniam est $\underset{\cdot\cdot}{x}$ primum omnium x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. quæ in Æquatione occurrunt, ad minimum duæ conditiones applicandæ sunt ad valores ipsorum x & $\underset{\cdot}{x}$; ita, ut vel una conditio applicetur ad valorem x, & alia ad valorem $\underset{\cdot}{x}$, vel utraque applicetur ad valorem x. Reliquæ autem conditiones possunt pro lubitu applicari ad valores omnium x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. in infinitum; ita, ut vel una conditio applicetur ad unum ex istis terminis, & alia ad alium; vel etiam ut omnes conditiones applicentur ad diversos valores ejusdem termini.

Sint

Sint duæ Æquationes $\underset{\cdot\cdot}{x} - \underset{\cdot}{v} + \underset{\therefore}{vz} = o$, & $\underset{\therefore}{xz} - \underset{\cdot\cdot}{v} = o$. In his Æquationibus ad mentem hujus Propositionis est $p = 1$, $\pi = 2$, $a = 2$, $\alpha = o$, $b = 1$, $\beta = 1$. Unde fit $a + \beta = 3$ & $\alpha + b = 1$, adeoq; $m = 3$ $(= a + \beta,)$ atque $m + p = 4$, $m + \pi = 5$, & $m + p + \pi = 6$. Proinde per quatuor conditiones dabuntur omnes valores v, per quinque dabuntur omnes x, & per sex conditiones dabuntur omnes cùm x, tùm v. Quarum conditionum ad minimum una referenda est ad valorem v, duæ ad valores x & $\underset{\cdot}{x}$, reliquis tribus utcunque applicandis ad valores Incrementorum $\underset{\cdot}{v}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, & inferiorum.

Sint Æquationes fluxionales duæ $\dot{v}^3 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = o$, & $z\dddot{v} - z\dot{x}^2\ddot{x} - x\overset{4}{x} = o$. Tum ad mentem hujus Propositionis erunt $\underset{p}{v} = \dot{v}$, $\underset{\pi}{x} = x$, $\underset{p+a}{v} = \dot{v}$, $\underset{\pi+\alpha}{x} = \dot{x}$, $\underset{p+b}{v} = \dddot{v}$, & $\underset{\pi+\beta}{x} = \overset{4}{x}$; adeoque $p = 1$, $\pi = o$, $a = o$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = 4$, $a + \beta = 4$, $\alpha + b = 3$; unde fit $m = 4$, $m + p = 5$, $m + \pi = 4$, atque $m + p + \pi = 5$. Dabuntur ergò omnes v & x ex datis omnibus z per conditiones omninò quinque; quarum ad minimum una pertinet ad valorem ipsius v, reliquæ possunt utcunque applicari ad valores ipsorum v, x, & Fluxionum suarum. Proinde si curvæ duæ sint describendæ, quarum ordinatæ sint v & x, & abscissa communis z, descriptâ curvâ cujus ordinata est v per quinque puncta data; vel per quatuor puncta & secante quintam ordinatam in angulo dato; vel in genere quæ transeat per unum punctum datum, & quatuor ordinatas positione datas secet vel in punctis, vel in angulis datis, vel in earum extremitatibus habeat curvaturam datam, vel symptomata quædam curvaturæ pendentia a valoribus Fluxionum $\ddot{v}$, $\dddot{v}$, & inferiorum; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ. Vel etiam si describatur altera curva, cujus ordinata est x; ita, ut quatuor ordinatas vel secet in punctis datis, vel alias

secet in punctis, alias in angulis datis; vel in earum extremitatibus curvaturas datas habeat, vel habeat alia quævis symptomata curvaturæ pendentia a Fluxionibus tertiis, quartis, & inferioribus; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ ex dato præterea uno valore v. Et modò detur una conditio respiciens valorem v, conditiones reliquæ poterunt pro lubitu distribui inter valores ordinatarum x & v, & Fluxionum suarum.

Porrò in his casibus possunt duo vel plures dati valores z inter se æquari, vel (quod idem est in Geometriâ) possunt duæ vel plures ex ordinatis positione datis coincidere. Sed hoc pendet a certis conditionibus petendis ex naturâ Æquationum quarumvis propositarum.

Sic propositis duabus Æquationibus $xv = z$ & $\dot{x}z + \dddot{x} - \ddot{v}\overset{4}{v} = o$, per hanc propositionem erunt conditiones quatuor, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores x & v, & Fluxionum suarum. Sed ob Æquationem primam $xv = z$ non possunt coincidere ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores utriusque v & x; nec ob Æquationem secundam possunt coincidere omnes quatuor ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $\dot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddot{v}$, $\overset{4}{v}$; nam datis simul utrisque x & v determinatur z per Æquationem primam; & datis simul omnibus $\dot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddot{v}$, $\overset{4}{v}$, item determinatur z per Æquationem secundam; utrumque contra Hypothesin. Eodem modo capiendo Fluxionem Æquationis primæ (pro $\dot{z}$ scripto 1 ut prius) invenies $\dot{x}v + x\dot{v} = 1$; unde etiam constat non posse coincidere omnes ordinatas, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium x, $\dot{x}$, v, $\dot{v}$. Et iterum capiendo Fluxiones Æquationum propositarum forsan dabuntur alii limites hujusmodi conditionum.

Adhæc, ut in Æquationibus integrales tantùm involventibus, sic in Æquationibus incrementalibus, quantitates variabiles sunt certis limitibus obnoxiæ. Sit exemplum in Æquatione fluxionali $x^2 - a\ddot{x} + z = o$.

$+ z = o$. Hinc est $\dot{x} = \sqrt{a\ddot{x} - z}$; unde erit $\dot{x}$ (adeoque & omnes ipsius Fluxiones) impossibilis ubi est $a\ddot{x} < z$. Ejusdem Æquationis Fluxio secunda est $2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} - a\overset{4}{x} = o$; unde fit $\dot{x} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a\overset{4}{x} - x\ddot{x}}$; erit ergò semper $x\ddot{x} > \tfrac{1}{2}a\overset{4}{x}$. Et eodem modo per ulteriores Fluxiones Æquationis propositæ forsan invenies alios limites variabilium.

LEMMA I.

In Æquatione plura ejusdem quantitatis variabilis Incrementa involvente, per nullam regulam generalem certò definiri potest ad quot dimensiones ascendat quantitas illa in Æquatione integrali definiente ejus relationem ad alias quantitates variabiles.

In Æquatione fluxionali $\ddot{x}x + \dot{x}\dot{x} + n\ddot{x}z + \dot{x}\dot{z} = o$, quantitates sunt semel tantùm affectæ, & ubi est $n = 2$, datur x ex dato z per Æquationem quadraticam; sed tamen si fiat $n = 3$, non dabitur x, nisi per Æquationem cubicam; si $n = 4$, non dabitur x, nisi per Æquationem biquadraticam; si $n = \tfrac{1}{3}$, non dabitur x, nisi per Æquationem quinque dimensionum: Denique si terminorum reliquorum coefficientes fiant generales, ut fit $\ddot{x}x + m\dot{x}^2 + n\ddot{x}z + p\dot{x}\dot{z} = o$, dubito an dimensiones Æquationis quæsitæ per ullam certam legem definiri possint, si quidem omninò dari potest x ex dato z per Æquationem terminorum numero finitam. Sit alia Æquatio $4x^3\dot{z}^2 - 4x^2\dot{z}^2 = \overline{1 + z^2}|^2\dot{x}^2$. In hâc Æquatione ascendit x ad tertiam dignitatem, & ascendit $\dot{x}$ ad secundam; attamen datur x ex datâ z per Æquationem duarum dimensionum, cujus radix est $x = \dfrac{1 + z^2}{\overline{a + \sqrt{1 - a^2 z}}|^2}$. Mutatis verò coefficientibus haùd certò scio an dari possit x ex dato z per Æquationem finitam.

PROP. VI. PROB. IV.

Datis tot Æquationibus, quantitates integrales & Incrementa utcunque promiscuè involventibus, quot sunt variabiles x, v, y, &c. ad z referendæ, cujus valores omnes dantur; invenire relationes Integralium per Æquationes ab Incrementis liberas, quæ per coefficientes invariabiles indeterminatas adaptari possint ad conditiones Problematis per has Æquationes solvendi.

SOLUTIO.

Tenta num Æquatio aliqua proposita, vel ejus multiplex, vel submultiplex aliqua sit cognitum aliquod Incrementum quantitatis alicujus cognitæ. Hoc si sit, vice istius Æquationis propositæ substitue quantitatem illam cognitam factam æqualem quantitati cujus Incrementum primum, vel secundum, vel aliud quoddam est nihil; prout Æquatio proposita, vel ejus multiplex, vel submultiplex sit Incrementum primum, vel secundum, vel aliud quoddam quantitatis istius cognitæ. Hoc idem facto in omnibus Æquationibus propositis, si Æquationes inventæ integrales tantùm involvunt, dabitur Solutio in terminis numero finitis; quæ per coefficientes indeterminatos in quantitatibus assumptis accommodabitur ad conditiones Problematis. Q. E. F.

Sed si hoc pacto Problema solvi nequit, per eliminationes variabilium (ope Æquationum datarum, & novarum Æquationum inde derivatarum per Prop. 1. si opus est) quære tot novas Æquationes quot sunt variabiles x, v, y, &c. præter z, quarum una involvat tantùm x cum suis Incrementis (nempe præter z,) reliquæ involvant duas tantùm variabiles x & v, x & y, &c. (quarum una sit semper x) cum suis Incrementis (in omnibus Æquationibus semper subintellecto z.) Per Æquationem involventem tantùm x cum suis Incrementis quære valorem ipsius x, expressum per dignitates ipsius z, ope Propositionis alicujus sequentis. Deinde ope hujus Æquationis elimi-

elimineatur x cum ſuis Incrementis ab Æquationibus involventibus tantum x & v, x & y, &c. cum ſuis incrementis; & per æquationes hoc modo reſultantes quærantur valores ipſorum v, y, &c. expreſſi per dignitates ipſius z, eodem modo quo quærebatur valor ipſius x. Atque hoc pacto dabuntur omnes x, v, y, &c. expreſſi per dignitates ipſius z. Qui valores accommodabuntur ad conditiones Problematis ope coefficientium adhuc indeterminatorum. Et ſi horum valorum aliqui prodeunt in terminis numero finitis, vel in ſeriebus quæ ad expreſſiones finitas reduci poſſunt, ex hâc parte dabitur ſolutio verè Mathematica in terminis numero finitis. Sed ubi Series ad terminos finitos reduci nequit, ſolutio pro Mechanicâ eſt habenda, atq; ſeriei uſus erit in inventione radicis quæſitæ x, vel v, vel y, &c. per approximationes.

SCHOLIUM.

Reductio æquationum propoſitarum ad æquationes integrales in hâc ſolutione plurimum pendet a ſolertiâ Analyſtæ in inventione incrementorum (per *Prop.* 1.) exercitati. Quare in hunc finem utile eſt quantitatum variis modis compoſitarum incrementa quærere, eaq; in tabulas reſerre, quæ deinde conſuli poſſunt, quoties opus eſt alicujus incrementi integralem invenire. Hujus generis eſt ſequens tabella.

Incrementa.	Integrales.
1. $a\underset{\cdot}{z} + bz\underset{\cdot}{z} + czz'\underset{\cdot}{z} +$	$A + \frac{1}{1}az + \frac{1}{2}bzz' + \frac{1}{3}czz'z'' +$
$dzz'z''\underset{\cdot}{z} + \&c.$	$\frac{1}{4}dzz'z''z''' + \&c.$
2. $\frac{a\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}} + \frac{b\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}} + \frac{c\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}} +$	$A - \frac{a}{1z} - \frac{b}{2zz_{\prime}} - \frac{c}{3zz_{\prime}z_{\prime\prime}} -$
$\frac{d\underset{\cdot}{z}}{zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}z_{\prime\prime\prime\prime}} + \&c.$	$\frac{d}{4zz_{\prime}z_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}} - \&c.$

Fluxiones.	Fluentes.
1. $\dot{z}z^{\pm n}$	$\frac{1}{\pm n+1}z^{\pm n+1}+A.$
2. $\overline{\vartheta\dot{z}x+\lambda\dot{x}z}\times z^{\theta-1}x^{\lambda-1}$	$A+z^{\theta}x^{\lambda}$
3. $\overline{\vartheta\dot{z}xv+\lambda\dot{x}zv+\mu\dot{v}zx}\times z^{\theta-1}x^{\lambda-1}\times v^{\mu-1}$	$A+z^{\theta}x^{\lambda}v^{\mu}.$
4. $\overline{\vartheta\dot{z}xvy+\lambda\dot{x}zvy+\mu\dot{v}zxy+\pi\dot{y}zxv}\times z^{\theta-1}x^{\lambda-1}v^{\mu-1}y^{\pi-1}$	$A+z^{\theta}x^{\lambda}v^{\mu}y^{\pi}.$

Comparando expressiones propositas cum hujusmodi exemplis solvuntur quædam Problemata. Sit æquatio $\dddot{x}\dot{x}x-\ddot{x}^2x-2\dot{x}^2\ddot{x}=0$. Comparando hanc æquationem cum fluxionis tertiæ factore $\vartheta\dot{z}xv+\lambda\dot{x}zv+\mu\dot{v}zx$, invenitur $\vartheta=1$, $\lambda=-1$, $\mu=-2$, ipsis $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x in hâc æquatione subeuntibus vices ipsorum z, x, v, in fluxione istâ. Unde fit fluens $\ddot{x}\dot{x}^{-1}x^{-2}$ æqualis quantitati datæ, (quoniam est ipsius fluxio æqualis nihilo.) Sit itaq, a quantitas data, atq; erit $\ddot{x}\dot{x}^{-1}x^{-2}=a\dot{z}$ (nempe completis ordinibus fluxionum per dignitates fluxionis datæ $\dot{z}$.) Hinc fit $\ddot{x}=a\dot{z}\dot{x}x^2$; unde iterum regrediendo ad fluentes (ad exemplum fluxionis $\dot{z}z^{\pm n}$) fit $\dot{x}=\frac{a\dot{z}x^3}{3}+b\dot{z}$. Quo pacto jam revocatur æquatio fluxionalis ordinis tertii ad æquationem fluxionalem ordinis tantum primi.

Ad eundem modum potest æquatio $\ddot{x}^2=x^3\dot{z}^4$, vel (pro $\dot{z}$ scripto 1) $\ddot{x}^2=x^3$ revocari ad ordinem superiorem. Nam extrahendo radicem

radicem fit $\ddot{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Duc æquationem in $\dot{x}$, atq; fit $\ddot{x}\dot{x} = \dot{x}x^{\frac{3}{2}}$; unde capiendo fluentes fit $\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + a$.

Sit alia æquatio $\ddot{x}^2 = \dot{x}x$: tum extractâ radice fit $\ddot{x} = \dot{x}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, hoc est $\ddot{x}\dot{x}^{\frac{1}{2}} = \dot{x}x^{\frac{1}{2}}$, unde capiendo fluentes fit $\frac{2}{3}\dot{x}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + a$, vel si placet $\dot{x}^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + a$. Et hoc modo per multiplicationes, divisiones, & extractiones radicûm reducendo expressiones ad formas fluxionum cognitarum, vel inveniuntur ipsæ fluentes, vel revocantur æquationes ad fluxionum ordines superiores.

PROP. VII. THEOR. III.

Sint z & x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa $\underset{\cdot}{z}$, *& sit* $n\underset{\cdot}{z} = v$, $v - \underset{\cdot}{z} = \dot{v}$, $\dot{v} - \underset{\cdot}{z} = \ddot{v}$, *& sic porrò. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit z + v, x item cresendo fiet*

$$x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\cdot\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} + \&c.$$

DEMON-

DEMONSTRATIO.

x	$\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\because}{x}$	$\underset{::}{x}$	&c.
$x+\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.	
$x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+2\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+2\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.		
$x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+3\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.			
$x+4\underset{\cdot}{x}+6\underset{\cdot\cdot}{x}+4\underset{\because}{x}+\underset{::}{x}$	&c.				
&c.					

Valores successivi ipsius x per additionem continuam collecti sunt x, $x+\underset{\cdot}{x}$, $x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$, $x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$, &c. ut patet per operationem in tabula annexa expressam. Sed in his valoribus x coefficientes numerales terminorum x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, &c. eodem modo formantur, ac coefficientes terminorum correspondentium in dignitate binomii. Et (per Theorema *Newtonianum*) si dignitatis index sit n, coefficicientes erunt $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. Ergò quo tempore z crescendo fit $z + n\underset{\cdot}{z}$, hoc est $z + v$, fiet x æqualis seriei $x + \frac{n}{1}\underset{\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} + \underset{\because}{x}$ &c.

Sed sunt $\frac{n}{1} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z}}{\underset{\cdot}{z}} = \right)\frac{v}{\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-1}{2} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - \underset{\cdot}{z}}{2\underset{\cdot}{z}} = \right)\frac{v}{2\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-2}{3} =$

(nz

$\left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - 2\underset{\cdot}{z}}{3\underset{\cdot}{z}} =\right) \frac{\ddot{v}}{\underset{\cdot}{z}}$, &c. Proinde quo tempore z crescendo fit $z + v$, eodem tempore x crescendo fiet $x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\therefore}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} +$ + &c.

COROLL. I.

Et ipsis $\underset{\cdot}{z}, \underset{\cdot}{x}, \underset{\cdot\cdot}{x}, \underset{\therefore}{x}$, &c. iisdem manentibus, ~~mutato signo ipsius v,~~ et mutato signo incrementorum etiam quo tempore z decrescendo fit $z - v$, eodem tempore x decrescendo fiet $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}}{\text{[redacted]}\ 1.2\underset{\cdot}{z}^2} - \underset{\therefore}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$ &c. vel juxta notationem nostram $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} - \underset{\therefore}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}\underset{\prime\prime}{v}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$ &c. ipsis $\dot{v}, \ddot{v}$, &c. conversis in $-\underset{\prime}{v}, -\underset{\prime\prime}{v}$, &c.

COROLL. II.

Si pro Incrementis evanescentibus scribantur fluxiones ipsis proportionales, factis jam omnibus $\ddot{v}, \dot{v}, v, \underset{\prime}{v}, \underset{\prime\prime}{v}$, &c. æqualibus quo tempore z uniformiter fluendo fit $z + v$ fiet x, $x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3}$ &c. vel mutato signo ipsius v, quo tempore z decrescendo fit $z - v$, x decrescendo fiet $x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3} +$ &c.

PROP. VIII. PROB. V.

Datâ Æquatione præter uniformiter crescentem z involvente quotvis incrementa alterius variabilis x; invenire valorem x ex dato z per seriem terminorum numero infinitam.

Per Propositionem primam quære æquationis propositæ incrementa omnia in infinitum. Tum si sit $\underset{n}{x}$ infimum incrementum ipsius x in æquatione propositâ per has æquationes dabuntur omnia incrementa $\underset{n}{x}$ & inferiora expressa per incrementa ipsa $\underset{n}{x}$ superiora. Sint a, & c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, $\underset{\therefore}{c}$, &c. certi quidam valores correspondentes ipsorum z & x, $\underset{.}{x}$, $\underset{..}{x}$, $\underset{\therefore}{x}$, &c. atque per easdem æquationes dabuntur omnes termini $\underset{n}{c}$, $\underset{n+1}{c}$, & sequentes expressi per terminos præcedentes ipsum $\underset{n}{c}$. Unde si pro z scribatur $a + v$, dabitur x per æquationem $x = c + \underset{.}{c}\,\frac{v}{1z} + \underset{..}{c}\,\frac{v\grave{v}}{1.2z^2} + \underset{\therefore}{c}\,\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1.2.3z^3} + \text{\&c.}$ (per *Prop.* 7.) Ubi terminorum coefficientes c, $\underset{.}{c}$, $\underset{..}{c}$, &c quorum numerus est n, dabuntur per totidem conditiones Problematis.

SCHOLIUM.

Ubi est x compositum aliquod ex dignitatibus integris affirmativis ipsius z, evanescentibus incrementis inferioribus, post certum numerum terminorum series abrumpetur & fiet finita. Sit æquatio $\underset{..}{x}z - \underset{..}{x} + 1 = 0$, & sit $\underset{1}{z} = 1$. Tum capiendo incrementa, fiet $\underset{...}{x}z + \underset{..}{x} = 0$.

Sed

Sed hoc fieri nequit nisi sit $\ddot{x} = 0$; aliàs enim determinaretur z per æquationem $z + 1 = 0$. Ergò si pro z scribatur $a + v$, & sint c & $\dot{c}$ ipsorum x & $\dot{x}$ valores quando $v = 0$, erit semper $x = c + \dot{c}v$, hoc est, (pro $\dot{c}$ scripto ipsius valore per æquationem propositam invento) $x = c + \frac{c-1}{a} v$, hoc est (pro v scripto ipsius valore $z - a$) $x = 1 + \frac{c-1}{a} z$.

In seriebus hoc modo prodeuntibus post aliquot terminos ex observatâ analogiâ plerumque possunt inveniri coefficientes sequentes absque ulteriori calculo. Et possunt nonnunquam series inventæ comparari cum aliis seriebus cognitis, quæ producuntur a cognitis expressionibus finitis: quare vice serierum substitutis istis expressionibus finitis, eo pacto dabuntur integrales in terminis numero finitis.

Sit æquatio fluxionalis $\ddot{x}z + n\ddot{x}x - \dot{x} - \dot{x}^2 = 0$, ubi pro z scribitur 1. Hinc fit $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + \dot{x}^2}{z + nx}$ vel (pro $z + nx$ scripto y) $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + \dot{x}^2}{y}$

Et per calculum continuatum invenietur $\dddot{x} = (\overline{2 - n} \times \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^3}{y^2} =)$ $\overline{2 - n}\, \frac{\dot{x}}{y} \ddot{x}$, $\overset{4}{x} = \overline{3 - 2n}\, \frac{\dot{x}}{y} \dddot{x}$, $\overset{5}{x} = \overline{4 - 3n}\, \frac{\dot{x}}{y} \overset{4}{x}$, & sic porrò. Quare (pro $a + nc$ scripto p,) per hanc *Prop.* erit $x = c + \dot{c}v + \frac{\ddot{c}v^2}{2} + \frac{\overline{2 - n}\, \dot{c}\, \ddot{c} v^3}{1.2.3p} + \frac{\overline{2 - n}.\overline{3 - 2n}.\dot{c}^2 \ddot{c} v^4}{1.2.3.4p^2} +$ &c. hoc est $x = c + \dot{c}v +$ $\overline{\frac{\ddot{c}p^2}{n\dot{c}^2} \times \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \dot{c}^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} \dot{c}^3 v^3 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2 - n}{3p} \times \frac{3 - 2n}{4p} \dot{c}^4 v^4}$ + &c. Sed numeri n, 1, $2 - n$, $3 - 2n$, &c. producuntur per continuam subductionem numeri $n - 1$. Quare si sit $p = n - 1$, erit series

$\frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \dot{c}^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{2 - n}{3p} \dot{c}^3 v^3 +$ &c. $= \overline{1 + \dot{c}v}|^{\frac{n}{1 - 1}} - 1 +$

n

$\frac{n}{n-1}\dot{c}v$. Pone itaque $p = n - 1$, hoc eſt, fiat $a = n - 1 - nc$, atqne dabitur x per æquationem finitam $x = c + \dot{c}v + \ddot{c}\,\overline{\frac{n-1}{n\dot{c}^2}}\big|^2 \times \overline{1 + \dot{c}v}\big|^{\frac{n}{n-1}} - 1 - \frac{n}{n-1}\dot{c}\dot{v}$; ubi eſt $\ddot{c} = \frac{\dot{c} + \dot{c}^2}{n-1}$, atque $v = z - n + 1 + n\dot{c}$; atque incogniti c & $\dot{c}$ determinandi ſunt per duas conditiones Problematis. Porro in hâc æquatione x & z ſubeunt vices ipſorum z & x in æquatione $\ddot{x}x + \dot{x}x + n\dot{x}z + \dot{x}\dot{z} = 0$, quam adduximus in *Lem.* 1. Eam verò in ordine ad inventionem hujus expreſſionis finitæ (abſque iſthac transformatione quidem fruſtra quæſitæ) transformavi per Propoſitionem ~~tertiam~~. Cujus Propoſitionis uſus quantus ſit conſtat etiam ex hoc exemplo. Sed & fluente uniformiter z, ubi in æquatione propoſitâ involvuntur fluxiones ſecundæ, tertiæ, vel ſequentes ipſius x, ſi per hanc Propoſitionem cupis invenire valorem ipſius z ex dato x, erit æquatio eodem modo transformanda.

Nonnunquam per alias transformationes inveniuntur expreſſiones finitæ. Sit æquatio $4x^3 - 4x^2 = \overline{1 + z^2}\big|^2 \dot{x}^2$ (quam etiam adduximus in *Lem.* 1.) Pono $x = v^{\theta} y^{\lambda}$, deinde ſubſtituto hoc valore x, & valore fluxionis $\dot{x}$ inde reſultante, quærendo æquationis formam ſimpliciſſimam determino indices θ & λ, & valorem unius v vel y. Hinc ergò fit $\dot{x} = \overline{\theta\dot{v}y + \lambda\dot{y}v} \times v^{\theta - 1} y^{\lambda - 1}$, atque (per ſubſtitutionem) $4v^{3\theta} y^{3\lambda} - 4v^{2\theta} y^{2\lambda} = \overline{1 + z^2}\big|^2 \times \overline{\theta\dot{v}y + \lambda\dot{y}v}\big|^2 v^{2\theta - 2} y^{2\lambda - 2}$. Pono $v = 1 + z^2$, & æquatio fit ſimplicior $4v^{\theta} y^{\lambda + 2} - 4y^2 = \overline{2\theta zy + \lambda\dot{y}v}\big|^2$. Pono $\lambda = -2$ & fit $v^{\theta} - y^2 = \overline{\theta zy - \dot{y}v}\big|^2$, hoc eſt $v^{\theta} = \left.\begin{matrix}\theta^2 z^2 \\ +1\end{matrix}\right\} y^2 - 2\theta z v y\dot{y} + v^2\dot{y}^2$. Pono deniq; $\theta = 1$, atque fit $\theta z^2 + 1 = v$, quo pacto

pacto æquatio divisa per v fit $1 = y^2 - 2zy\dot{y} + v\dot{y}\dot{y}$. Unde capiendo fluxiones fit $0 = 2y\dot{y} - 2y\dot{y} - 2z\dot{y}\dot{y} - 2zy\ddot{y} + \dot{v}\dot{y}\dot{y} + 2v\dot{y}\ddot{y}$, hoc est (pro $\dot{v}$ scripto ipsius valore $2z$) $-2zy\ddot{y} + 2v\dot{y}\ddot{y} = 0$. Hinc fit vel $\ddot{y} = 0$, vel $-zy + v\dot{y} = 0$. Si fiat $-zy + v\dot{y} = 0$, invenietur $y^2 = v$, adeoq; $x = (vy^{-2} =)\ 1$; quæ est singularis quædam solutio Problematis. Sed si fiat $\ddot{y} = 0$, pro ipsorum z, y, & $\dot{y}$ valoribus concurrentibus scriptis 0, a, & $\dot{a}$, invenietur $\dot{a} = \sqrt{1 - aa}$, adeoque erit $y = a + \sqrt{1-aa}\,z$ (per hanc Propositionem,) & inde $x = (v^{\theta}y^{\lambda} =)$

$$\frac{1 + z^2}{\overline{a + \sqrt{1-a^2}\,z +}\,|^{2}}.$$

Quoties fieri potest ipsius z valor datus æqualis nihilo, nec eo pacto termini seriei redduntur infiniti, series prodibit in formâ simpliciori ascendens per dignitates ipsius z. Et in hoc casu potest assumi series in terminis generalibus exprimens valorem x; in quâ coefficientes postea determinentur per comparationem terminorum, ad normam sequentis exempli.

Sit æquatio $\ddot{x} - \dot{x}z - 2x = 0$. Pone $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ Tum capiendo fluxiones fit $\dot{x} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \&c.$ atque $\ddot{x} = 2C + 6Dz + 12Ez^2 + \&c.$ Quibus valoribus ipsorum x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ in æquatione scriptis, & terminis dispositis secundùm dignitates ipsius z fit

$$\left.\begin{array}{llll} 2C + & 6Dz + & 12Ez^2 + & \&c. \\ -2A - & 2B - & 2C & \&c. \\ & -\ B - & 2C & \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

In hâc æquatione (ne fiat z quantitas determinata per æquationem affectam alicujus ordinis Analytici, quod in hoc casu est absurdum, quoniam ex hypothesi

est z quantitas variabilis, & semper ad libitum sumenda,) debent termini omnes evanescere per se, per valores coefficientium A, B, C, &c. Erit ergò per terminum primum $C = A$, per secundum $D = \frac{1}{2}B$, per tertium $E = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A$, & sic porrò; unde fit $x = A + Bz + Az^2 + \frac{1}{3}Bz^3 + \frac{1}{8}Az^4 +$ &c.

Ubi hoc modo procedere velis per assumptionem serierum in formis generalibus, sæpè difficile est istas formas invenire; præsertim si cupis coefficientes quot opus est indeterminatos esse relictos, ut consulatur conditionibus Problematis. Series quasdam particulares quærit *Newtonus* per extractiones radicum ab æquatiobus affectis, & methodum docet, concinnam sanè & elegantem, inveniendi formas hujusmodi serierum, per dispositionem terminorum in parallelogrammis. Quod Artificium (factâ levi mutatione) in sequenti propositione explicabimus.

PROP. IX. PROB. VI.

Datâ æquatione fluxionali duas tantùm Fluentes z & x, & earum Fluxiones involvente, quarum z uniformiter fluit per Fluxionem 1; invenire formas Serierum ascendentium per dignitates ipsius z, per quas exprimi possit valor ipsius x.

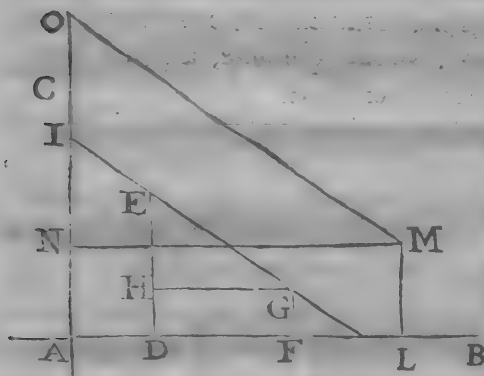
Seriei quæsitæ forma generalis est $Az^{\vartheta} + Bz^{\vartheta+n} + Cz^{\vartheta+2n} +$ &c. & in dato casu speciali determinandi sunt indices dignitatum ϑ & n. Qui tales esse debent, ut, conversis omnibus terminis æquationis propositæ in series, in iis substituendo valores ipsius x & fluxionum suarum per hanc seriem, & per ejus fluxiones expressos, possint termini omnium serierum hoc modo provenientium ita inter se disponi, ut, per comparationem terminorum in quibus sunt eædem dignitates ipsius z queant determinari coefficientes A, B, C, D, &c.

vel

vel omnes, vel quot fieri poteſt. Ad hoc duo requiruntur. Primùm, ut indices dignitatum z, in ſeriebus ex terminis æquationis propoſitæ per ſubſtitutionem provenientibus, omnes cadant in eandem ſeriem arithmeticè proportionalium; alias enim ſemper eſſent termini ſolitarii, per quos vel nihil determinaretur, vel fierent omnes coefficientes æquales nihilo. Secundò etiam requiritur, ut ſerierum hoc modo provenientium ad minimum duarum terminorum primorum indices inter ſe æquentur, ut determinetur coefficiens primus A: ne per terminum ſolitarium in initio æquationis ad comparationem terminorum inſtituendam ordinatæ fiat coefficiens A, vel fortè quantitas aliqua data in æquatione propoſitâ, æqualis nihilo; quo pacto perturbetur ordo ſeriei inveniendæ.

His præmiſſis, ſi terminus aliquis æquationis propoſitæ ſepoſito coefficiente dato ſit $z^{\mu} x^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \ddot{x}^{\gamma} \dddot{x}^{\delta}$ &c. terminus primus ſeriei ab hoc termino provenientis, (ſepoſito etiam coefficiente) erit $z^{\overline{\mu+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.} \times \vartheta - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.}$; & ſi pro indice hujus termini ſcribatur π, ſeries illa (ſepoſitis coefficientibus) hanc habebit formam $\ldots z^{\pi} \ldots z^{\pi+n} \ldots z^{\pi+2n} \ldots z^{\pi+3n} \ldots$ &c. ita ut omnes ſeries ex terminis æquationis propoſitæ provenientes aſcendant per ipſius z dignitatem n. Hoc facile intelligitur paululum attendendo ad formationes fluxionum ſeriei $Az^{\vartheta} + Bz^{\vartheta+n} + Cz^{\vartheta+2n} +$ &c. & ad geneſes ſerierum ex terminis æquationis propoſitæ per multiplicationes hujuſmodi fluxionum in invicem. Ergò per jam dicta, debent omnes π cadere in eandem ſeriem arithmeticè proportionalium, quorum differentia eſt n, & ad minimum duo π in principio æquationis transformatæ debent eſſe inter ſe æquales. Qui vel omnium minimi erunt ſi ſit n affirmativus, vel omnium maximi ſi ſit n negativus. Ergò percurrendo omnes terminos æquationis propoſitæ ex ſingulis colligatur numerus π vel $\mu + \overline{\alpha+\beta+\gamma+\delta + \&c.}$

$\overline{\mp \text{\&c.}} \times \vartheta - \beta - 2\gamma - 3\delta -$ &c. vel (pro $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c. scripto y, & pro $\mu - \beta - 2\gamma - 3\delta -$ &c. scripto v,) $y\vartheta + v$. Sint $y\vartheta + v$, & $\dot{y}\vartheta + \dot{v}$ duo ex hujusmodi numeris. Tum si hi numeri tales sint, ut facti inter se æquales, & inde determinato ϑ, sint omnium numerorum $y\vartheta + v$ per istum valorem ϑ provenientium vel maximi, vel minini, rectè determinabitur ϑ. Hoc autem fit sequenti artificio.



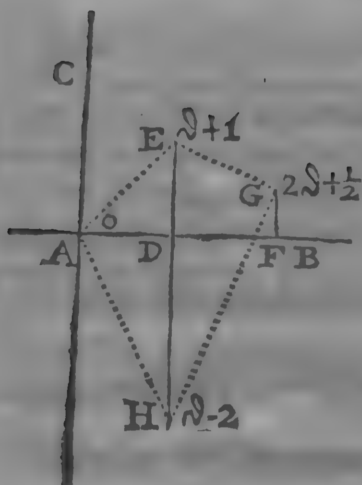
Duc rectas infinitas AB, AC, & (sumptâ aliquâ lineâ pro unitate) in AB (ad dextram si sit y affirmativus, sed ad sinistram si sit y negativus) sume AD $= y$, & ductâ DE ipsi AC parallelâ, in eâ (sursum si sit v affirmativus, at deorsum si contrâ) sume DE $= v$, & colloca numerum $y\vartheta + v$ in puncto E. Omnibus numeris $y\vartheta + v$ in punctis hoc modo dispositis, sint eorum exteriora duo E & G, ita ut puncta reliqua omnia cadant ad easdem partes rectæ EG. Tum numeri in punctis E & G inter se facti æquales dabunt valorem indicis ϑ. Duc enim GF parallelam ipsi CA & occurrentem AB in F, & sit M aliud punctum in quo collocatur alius numerus π, & ducatur ML parallela ipsi CA & occurrens AB in L, atq; occurrent GE ipsi AC in I, & ducatur ei parallela MO occurrens AC in O, atq; ducantur GH, MN ipsi AB paralleæ & occurrentes DE & AC in H & N. Tum numeri π collocati in punctis E, G, & M erunt AD $\times \vartheta +$ DE, AF $\times \vartheta +$ FG, & AL $\times \vartheta +$ LM (per constructionem). Quare si numeri in E & G fiant æquales erit $\vartheta = \frac{DE - FG}{AF - AD}$, hoc est $\vartheta = \frac{HE}{HG}$, vel (ob similia triangula EHG, ONM) $\frac{NO}{NM}$.

Unde

Unde jam numerus $AL \times \vartheta + LM$ in puncto M fit $AL \times \frac{ON}{NM} +$ LM, hoc est AO; atq; ad eundem modum numeri æquales in E & G fiunt AI. Unde si puncta E & G sint omnium exteriora, adeo ut cadat punctum I vel infra vel supra omnia puncta O, erit AI, hoc est numerus π in E, vel in G, minor, vel major quolibet alio numero AO in puncto quovis alio M. Unde per positionem puncti I respectu punctorum O, determinatur signum ipsius ν; quippe qui affirmativus est ubi I cadit infra O, & negativus si contra. Et hinc facile constat esse ν maximum divisorem communem ipsius AI & omnium AO; alias enim non caderent omnes π in eandem seriem arithmetice proportionalium, ut per jam dicta fieri debet.

Ergo numeris omnibus π in plano hoc modo dispositis, si applicetur regula ad puncta duo exteriora E & G, dabitur index ϑ, atq; signum indicis ν. Deinde invenietur ipse ν sumendo maximum divisorem communem omnium numerorem π provenientium per valorem ϑ jam inventum. Unde dabitur forma seriei quæsitæ. *Q. E. I.* Ipsius autem ϑ signum est affirmativum ubi GE subtendit angulum CAB, atq, negativum ubi subtendit ejus complimentum ad duos rectos.

Sit hujus rei exemplum in æquatione $1 + zx - z^{\frac{3}{2}} \dot{x}x - \ddot{x} = 0$. Percurrendo terminos hujus æquationis, in primo 1 sunt $\mu = 0 = \alpha = \beta = \gamma =$ &c. Unde primus numerus π (vel $y\vartheta + v$) erit 0. In secundo termino zx sunt $\mu = 1 = \alpha$, $\beta = 0 = \gamma = \delta =$ &c. unde secundus numerus π fit $\vartheta + 1$. In tertio termino $z^{\frac{3}{2}} \dot{x}x$ sunt $\mu = \frac{3}{2}$, $\alpha = 1 = \beta$, $\gamma = 0 = \delta =$ &c. unde tertius π fit $2\vartheta + \frac{1}{2}$. Denique in ultimo termino $\ddot{x}$ sunt $\mu = 0 = \alpha = \beta$, $\gamma = 1$, $\delta = 0 =$ &c. unde ultimus π fit $\vartheta - 2$.



Ductis itaque AB & AC, erit punctum A locus numeri π primi, vel o. Sume abscissam AD = 1, & ordinatam ipsi AC parallelam DE = 1, atq; erit E locus secundi π; vel $\vartheta + 1$. Sume abscissam AF = 2, & ordinatam FG = $\frac{1}{2}$, atque erit G locus tertii π, vel $2\vartheta + \frac{1}{2}$. Sume denique AD = 1, & ordinatam DH = -2, atque erit H locus numeri $\vartheta - 2$.

Jam ductis rectis per puncta omnia exteriora, includentur omnia puncta trapezio AHGEA. Æquatis inter se numeris o & $\vartheta - 2$ in extremitatibus lateris AH, fiet $\vartheta = 2$, & omnes numeri π fient, o, o $(= \vartheta - 2 = o,)$ 3 $(= \vartheta + 1,)$ & $\frac{9}{2}$ $(= 2\vartheta + \frac{1}{2},)$ quorum omnium minimi sunt duo æquales o, & divisor maximus communis est $\frac{3}{2}$; quare in hoc casu est $n = \frac{3}{2}$.

Pro numeris æqualibus sumptis $\vartheta - 2$ & $2\vartheta + \frac{1}{2}$ in extremitatibus lateris HG, fit $\vartheta = -\frac{5}{2}$, & omnes numeri π fiunt $-\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{3}{2}$, o; quorum minimi sunt duo æquales $-\frac{9}{2}$, & maximus divisor communis est $\frac{3}{2}$: quare in hoc casu est $n = \frac{3}{2}$.

Si fiant $2\vartheta + \frac{1}{2}$ & $\vartheta - 1$ inter se æquales erit $\vartheta = \frac{1}{2}$, & numeri omnes erunt $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, o, $-\frac{3}{2}$, quorum maximi sunt duo æquales $\frac{3}{2}$, & divisor communis est $\frac{3}{2}$: quare in hoc casu est $n = -\frac{3}{2}$.

Denique si fiat $\vartheta + 1 = o$, erit $\vartheta = -1$, & omnes numeri erunt o, o, $-\frac{3}{2}$, -3, quorum maximi sunt duo o, & divisor maximus communis est $\frac{3}{2}$: quare in hoc casu est $n = -\frac{3}{2}$.

Potest

Poteſt ergò fieri

vel 1. $x = Az^{-3} + Bz^{-\frac{7}{2}} + Cz^{-5} + \&c.$

vel 2. $x = Az^{-\frac{5}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{\frac{1}{2}} + \&c.$

vel 3. $x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$

vel 4. $x = Az^{-1} + Bz^{-\frac{5}{2}} + Cz^{-4} + \&c.$

In caſu tertio Analyſis ſe habet ut infra exhibetur.

Æqu. propoſita.		$1 + zx - z^{\frac{3}{2}} x\dot{x} - \ddot{x} = 0$
Æqu. aſſumpta.		$x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$
Fluxiones.		$\dot{x} = \frac{1}{2} Az^{-\frac{1}{2}} - Bz^{-2} - \frac{5}{2} Cz^{-\frac{7}{2}} - \&c.$ $\ddot{x} = -\frac{1}{4} Az^{-\frac{3}{2}} + 2Bz^{-3} + \frac{35}{4} Cz^{-\frac{9}{2}} + \&c.$
Æquatio transformata.	zx	$Az^{\frac{3}{2}} + B + Cz^{-\frac{3}{2}} + \&c.$
	$-z^{\frac{3}{2}} x\dot{x}$	$-\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} AB + 2AC$ $+ B^2$ &c.
	$1 - \ddot{x}$	$+ 1 + \frac{1}{4} A - \&c.$ $\Bigg\} = 0.$
Inventio Coefficientium	1.	$A - \frac{1}{2} A^2 = 0.$ Unde $A = 2.$ vel $A = 0.$
	2.	$B + \frac{1}{2} AB + 1 = 0.$ $B = -\frac{1}{2}.$ $B = -1.$
	3.	$C + 2AC + B^2 + \frac{1}{4} A = 0.$ $C = -\frac{3}{20}.$ $C = -1.$
	&c.	&c. &c. &c.
Valores Radicis	1.	$x = 2z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{3}{20} z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$
	2.	$x = \quad - z^{-1} - z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$

In hâc æquatione, ut vides, duæ ſunt ſeries exprimentes valorem ipſius x, prodeuntes per duos valores ipſius A in æquatione $A - \frac{1}{2} A^2 = 0$, & harum ſerierum ſecunda eſt ejuſdem formæ ac ſeries in caſu ultimo; quare per unam hanc Analyſin invenitur utraque ſeries, tam caſûs quarti, quam caſus ſecundi. Quinetiam per Analyſin inſtitutam in caſu ſecundo eodem modo ſimul invenies ſeriem in caſu primo. Unde per duas tantùm Analyſes ſeries omnes inveniuntur. Sed hoc in eo caſu tantùm fit ubi eſt n idem in duabus ſeriebus, atq; ubi una radix A in æquatione primâ inventâ per comparationem terminorum eſt o. Poſſunt autem plures eſſe radices A in iſtâ æquatione, pro genio cujuſvis æquationis propoſitæ; & quot ſunt radices A, tot dabuntur ſeries per ſingulas Analyſes.

In hâc Analyſi ſecundò obſervandum eſt, quod omnes omninò coefficientes A, B, C, &c. determinantur per comparationem terminorum. Quare ſeries hoc modo inventæ ſunt omnes particulares, neque accommodari poſſunt ad conditiones Problematis, ob defectum coefficientium indeterminatorum.

SCHOLIUM.

Nonnunquam ubi index θ eſt numerus integer affirmativus, evaneſcunt termini primi in ſeriebus exprimentibus fluxiones ipſius x: nam producuntur coefficientes iſtorum terminorum primorum per continuam multiplicationem ipſius A in numeros θ, $\theta - 1$, $\theta - 2$, &c. In hoc caſu ſæpe fit ut terminus evaneſcat, qui debeat eſſe unus ex terminis in principio æquationis transformatæ, quo pacto ſeries iſta aliquando fit impoſſibilis. Sed ſi evaneſcant termini in geneſi fluxionum, & tamen ſuperſint termini duo in principio æquationis transformatæ, ſeries adhuc dabitur; quæ etiam hoc erit cæteris præſtantior, quod in eâ erunt coefficientes aliquot indeterminati, per quas accommodari poteſt ſeries ad aliquot conditiones Problematis. Quinetiam per ſimilem evaneſcentiam terminorum in produ-

ctione fluxionum ſunt nonnunquam aliæ ſeries radicem exprimentes, quæ per hanc propoſitionem minimè inveniuntur.

Quoniam de æquationum radicibus particularibus jam loquimur, libet etiam hoc unum obiter obſervare; nempe quod ſi v ſit quantitas ex datis & variabilibus quovis modo compoſita, & poſſit æquatio ad talem formam reduci, ut omnis terminus involvat vel ipſum v, vel ejus incrementum aliquod, erit æquatio $v = 0$ particularis ſolutio Problematis. Si in æquatione hoc modo transformatâ involvatur ipſum v, æquatio $v = 0$ nullum continebit coefficientem indeterminatum, adeoq; ſolutio hæc erit maxime particularis; præſertim ſi v integrales tantum involvat. Si æquationem transformatam non ingreditur v, ſed $\dot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit unum coefficientem indeterminatum. Si æquatio eadem non continet nec v, neq; $\dot{v}$, ſed $\ddot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit duos coefficientes indeterminatos: atq; in genere quo plures terminorum ſuperiorum v, $\dot{v}$, $\ddot{v}$, &c. deficiunt in æquatione transformatâ eo generalior erit ſolutio Problematis per æquationem $v = 0$.

Ad hæc ubi v integrales tantùm involvit poteſt commode inveniri Problematis ſolutio generaliſſima, per v & incrementa ſua exterminando cæteras variabiles, & deinde quærendo radicem v per methodum aliquam jam traditam. Sic in æquatione $\dot{x} - \frac{\dot{z}}{z} - \dot{x}z = 0$, pro $x - \frac{1}{z}$ ſcripto v fit $\dot{v} - \dot{v}z = 0$, hoc eſt $\frac{\dot{v}z - v\dot{z}}{v^2} = 0$. Sed ipſius $\frac{\dot{v}z - v\dot{z}}{v^2}$ fluens eſt $\frac{z}{v}$: quare pro quantitate quavis invariabili ſcripto A erit $\frac{z}{v} = A$, hoc eſt $\frac{z}{x - \frac{1}{z}} = A$.

LEM-

LEMMA II.

Si datur x ex dato z per æquationem quamvis analyticam certi cujusvis numeri dimensionum; etiam dabitur ipsius x incrementum quodvis $\underset{n}{x}$ *ex dato z per æquationem ejusdem numeri dimensionm.*

Nam quot sunt dimensiones ipsius x in æquatione propositâ, tot sunt ejusdem radices (quippe etiam impossibiles ad numerando.) Sed singulæ radices x sua habent incrementa. Quare tot sunt radices incrementi cujusvis $\underset{n}{x}$ quot sunt radices ipsius integralis x; adeoq; utrumq; dabitur ex dato z per æquationes ejusdem numeri dimensionum. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc propositâ æquaitone definiente relationem singularis alicujus incrementi $\underset{n}{x}$ ad cognitam variabilem z, si dari potest integralis x ex dato z per æquationem terminorum numero finitam, dabitur per æquationem in quâ x ascendit ad tot dimensiones, atq; ascendit x in æquatione propositâ.

PROP. X. PROB. VII.

Datâ æquatione unius dimensionis definiente valorem cujusvis incrementi singularis $\underset{n}{x}$; *invenire valorem ipsius integralis x in terminis numero finitis, si fieri potest.*

Si dari poteſt relatio x ad quantitates cognitas in terminis numero finitis, dabitur per æquationem unius dimenſionis (per *Cor. Lem.* 2.) Solutio itaque quærenda eſt tentando an quantitas, cui ſit x æqualis, quo pacto reduci poſſit ad formam incrementi alicujus cogniti ejuſdem ordinis. Quod ſi fit, dabitur radix x in terminis numero finitis, faciendo eam æqualem integrali iſtius expreſſionis. Sed ſi hoc fieri nequit res deſperanda erit.

In fluxionibus quoties dari poſſunt fluentes in terminis numero finitis invenientur per Quadraturam Curvarum *Newtonianam*. Et nonnunquam commodè inveniuntur hujuſmodi expreſſiones per Propoſitiones duas ſequentes.

PROP. XI. THEOR. IV.

Ipſius $\dot{r}s$ *fluens exprimi poteſt per alterutram ex ſeriebus* $\left|\dot{r}s\right| = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} +$ *&c. vel* $\left|\dot{r}s\right| = \dot{r}s' - \ddot{r}s'' + \dddot{r}s''' -$ *&c.*

Theorema inveſtigatur ad ſequentem modum. Sit fluens quæſita $rs + p$, hoc eſt, ſit $\left|\dot{r}s\right| = rs + p$. Tum capiendo fluxiones erit $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$, hoc eſt $\dot{p} = -r\dot{s}$; adeoque $p = -\left|r\dot{s}\right|$, indeque $\left|\dot{r}s\right| = rs - \left|r\dot{s}\right|$. Itaque ſecundo fiat $\left|r\dot{s}\right| = r'\dot{s} + q$; & capiendo fluxiones erit $r\dot{s} = r\dot{s} + r'\ddot{s} + \dot{q}$, hoc eſt $q =$

$\dot{q} = -\overset{\prime}{r}\,\ddot{s}$, atque $q = -\left|\overset{\prime}{r}\,\ddot{s}\right|$, adeoque $\left|r\,\dot{s}\right| = r\,s - \overset{\prime}{r}\,\dot{s} + \left|\overset{\prime}{r}\,\ddot{s}\right|$.

Et per operationes repetitas eodem modo invenitur $\left|r\,\dot{s}\right| = r\,s - \overset{\prime}{r}\,\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\,\ddot{s} - \left|\overset{\prime\prime}{r}\,\dddot{s}\right| = r\,s - \overset{\prime}{r}\,\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\,\ddot{s} - \overset{\prime\prime\prime}{r}\,\dddot{s} + \left|\overset{\prime\prime\prime}{r}\,\ddddot{s}\right| =$ &c.

Ad eundem modum ſumendo fluentes ipſius s & fluxiones ipſius r inveſtigatur ſeries altera.

Quando hoc Theorema eſt applicandum ad caſum particularem, eligenda eſt fluxio aliqua $\dot{w}$, & in computandis fluentibus $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime\prime}{r}$, &c. vel $\overset{\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. cum primùm comparuerit fluens aliqua, ea ducenda erit in $\dot{w}$, & producti fluens ſumenda erit pro proximâ fluente quæſitâ. Item in computandis fluxionibus $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. vel $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. quoties colligitur fluxio aliqua, erit ea applicanda ad $\dot{w}$, & quotientis fluxio ſimiliter applicata ad $\dot{w}$ ſumenda erit pro fluxione proxime quæſitâ. Hæc autem fluxio $\dot{w}$ ita ſumenda eſt ut termini ſint quam fieri poteſt ſimpliciſſimi.

Poteſt etiam ſeries per hoc Theorema inventa dupliciter accommodari ad conditionem Problematis, hoc eſt, ad datum unum valorem fluentis quæſitæ reſpondentem dato valori variabilis cognitæ. Hoc fit primo ſumendo omnes fluentes r, $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. vel $\overset{\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. purè, abſque ullâ correctione per additionem invariabilium, & deinde ſeriei inventæ addendo invariabilem per conditionem iſtam poſtea determinandam. Idem fit ſecundò fluentes omnes, cum primum prodierint, ita corrigendo per additiones invariabi-

L lium,

Eum, ut omnes ſimul evaneſcant, (adeoque & ſeries tota evaneſcat,) quando variabilis data eſt certi alicujus valoris.

Adhæc quando terminus aliquis $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. æqualis eſt nihilo, ſeries prima abrumpitur, & fluentem dat in terminis numero finitis. Atque idem fit in ſerie alterâ, ubi evaneſcit terminus aliquis $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c.

EXEMP. I.

Sit $x\dot{x} = -z\dot{z}$, & propoſitum ſit invenire fluentem ipſius $z\dot{x}$. In hoc caſu ſi pro $\dot{r}$ ſumatur $\dot{z}$, & pro s ſumatur x, commodiſſimè fiet $\dot{w} = z\dot{z}$ $(= -x\dot{x})$. Et hoc pacto ſunt $r = z$, $\overset{\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w}r}\right| = \right)\frac{z^3}{3}$, $\overset{\prime\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w}\overset{\prime}{r}}\right| = \right)\frac{z^5}{5.3}$, $\overset{\prime\prime\prime}{r} = \left(\left|\overline{\dot{w}\overset{\prime\prime}{r}}\right| = \right)\frac{z^7}{7.5.3.}$, & ſic porrò; Item $\dot{r} = \left(\frac{\dot{z}}{\dot{w}} = \right)\frac{1}{z}$, $\ddot{r} = \left(\frac{\dot{r}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{z^3}$, $\dddot{r} = \left(\frac{\ddot{r}}{\dot{w}} = \right)\frac{3}{z^5}$, & ſic porrò. Sunt etiam $s = x$, $\dot{s} = \left(\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{x}$, $\ddot{s} = \left(\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-1}{x^3}$, $\dddot{s} = \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{w}} = \right)\frac{-3}{x^5}$, & ſic porrò; item $\overset{\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w}s}\right| = \right)\frac{-x^3}{3}$, $\overset{\prime\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w}\overset{\prime}{s}}\right| = \right)\frac{x^3}{5.3}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s} = \left(\left|\overline{\dot{w}\overset{\prime\prime}{s}}\right| = \right)\frac{-x^7}{7.5.3}$, & ſic porrò. Unde per ſeriem priorem $rs - \overset{\prime}{r}\dot{s} + \overset{\prime\prime}{r}\ddot{s} - \overset{\prime\prime\prime}{r}\dddot{s} + \&c.$ fit $\left|\overline{\dot{z}x}\right| = zx + \frac{z^3}{3x} - \frac{z}{5.3x^3} + \frac{z^7}{7.5x^5} - \&c.$ Et per ſeriem alteram $\dot{r}\overset{\prime}{s} - \ddot{r}\overset{\prime\prime}{s} + \dddot{r}\overset{\prime\prime\prime}{s} - \&c.$ fit $\left|\overline{\dot{z}x}\right| = \frac{-x^3}{3z} + \frac{x^5}{5.3z^3} - \frac{x^7}{7.5z^5} + \&c.$

In

In his feriebus fluentes r, $\acute{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. item $\acute{s}$, $\overset{\prime\prime}{s}$, $\overset{\prime\prime\prime}{s}$, &c. fumuntur pure; quare feries accommodandæ funt ad conditionem Problematis per additionem quantitatum invariabilium. Porro per harum ferierum primam exhibetur area circularis adjacens finui x & cofinui z, & per feriem alteram exhibetur ejufdem areæ complimentum ad quadrantem cum figno negativo: Quod ita fit quoniam area illa adjacet abfciffæ z ultra ordinatam productæ.

EXEMP. II.

Sit $x = a + bz^{n}$, & invenienda fit fluens ipfius $\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}$. In hoc cafu fi fiat $\dot{r} = \dot{z}z^{\theta}$, & $s = x^{\lambda-1}$ commodiffime fit $\dot{w} = \dot{x} = n b\dot{z}z^{n-1}$. Unde fumendo fluentes pure, ad inveniendam feriem priorem erit

$$r = \frac{z^{\theta}}{\theta}.$$

$$\acute{r} = \left(\overline{\dot{w}\,r} = \right) \frac{nbz^{\theta+n}}{\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+n} r.$$

$$\overset{\prime\prime}{r} = \left(\overline{\dot{w}\,\acute{r}} = \right) \frac{n^{2}b^{2}z^{\theta+2n}}{\theta+2n.\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+2n} \acute{r}.$$

$$\overset{\prime\prime\prime}{r} = \left(\overline{\dot{w}\,\overset{\prime\prime}{r}} = \right) \frac{n^{3}b^{3}z^{\theta+3n}}{\theta+3n.\theta+2n.\theta+n.\theta} = \frac{nbz^{n}}{\theta+3n} \overset{\prime\prime}{r}.$$

& fic porrò.

Item

Item $s = x^{\lambda-1}$

$$\dot{s} = \left(-\frac{s}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-2} = \frac{\lambda-1}{x}\,s.$$

$$\ddot{s} = \left(-\frac{\dot{s}}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-2}\cdot\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-3} = \frac{\lambda-2}{x}\,\dot{s}.$$

$$\dddot{s} = \left(-\frac{\ddot{s}}{\dot{w}}- = \right)\overline{\lambda-3}\cdot\overline{\lambda-2}\cdot\overline{\lambda-1}\,x^{\lambda-4} = \frac{\lambda-3}{x}\,\ddot{s}.$$

& sic porrò,

Unde (pro integris terminis cum suis signis scribendo A, B, C, &c.) fit

$$\boxed{\dot{z}z^{\theta-1}\;x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta}x^{\lambda-1}}{\theta} + \frac{-\lambda n+n}{\theta+n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}A + \frac{-\lambda n+2n}{\theta+2n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}B +$$

$$\frac{-\lambda n+3n}{\theta+3n}\cdot\frac{bz^{n}}{x}C + \&c.$$

Et ad inveniendam seriem alteram fit

$$\dot{r} = \left(\frac{\dot{z}z^{\theta-1}}{\dot{w}} = \right)\frac{z^{\theta-n}}{nb}.$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{\dot{r}}{\dot{w}}- = \right)\frac{\overline{\theta-n}\;z^{\theta-2n}}{n^{2}b^{2}} = \frac{\theta-n}{nbz}\,\dot{r}$$

$$\dddot{r} = \left(-\frac{\ddot{r}}{\dot{w}}- = \right)\frac{\overline{\theta-2n}.\overline{\theta-n}.\,z^{\theta-3n}}{n^{3}b^{3}} = \frac{\theta-2n}{nbz^{n}}\,\ddot{r}.$$

& sic porro.

Item

Item $\overset{\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\, s} = \right) \frac{x^{\lambda}}{\lambda}$

$$\overset{\prime\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\, \overset{\prime}{s}} = \right) \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1 . \lambda} = \frac{x}{\lambda+1} \overset{\prime}{s}$$

$$\overset{\prime\prime\prime}{s} = \left(\boxed{\dot{w}\, \overset{\prime\prime}{s}} = \right) \frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2 . \lambda+1 . \lambda} = \frac{x}{\lambda+2} \overset{\prime\prime}{s}$$

& ſic porro.

Unde (pro terminis integris cum ſuis ſignis ſcriptis A, B, C, &c.) fit

$$\boxed{\dot{z}z^{\theta-1} x^{\lambda-1}} = \frac{z^{\theta-n} x^{\lambda}}{\lambda n b} + \frac{-\theta+n}{\lambda n+n} . \frac{x}{bz^{n}} A + \frac{-\theta+2n}{\lambda n+2n} . \frac{x}{bz^{n}} B +$$

$$\frac{-\theta+3n}{\lambda n+3n} . \frac{x}{bz^{n}} C + \&c.$$

In his ſeriebus per terminos jam appoſitos ſatis conſtat ratio formandi reliquos. Cæterum quando eſt λ numerus integer affirmativus, ſeries prima tandem abrumpitur, & fluentem exhibet in terminis numero finitis. Quod idem fit in ſerie alterá, ubi eſt θ multiplex integer affirmativus ipſius n.

EXEMP. III.

Propoſitâ eadem fluxione $\dot{z}z^{\theta-1} x^{\lambda-1}$, ſit ſeries invenienda, quæ æqualis ſit nihilo quando $z = c$; idque ſit faciendum in ſerie aſcendente per dignitates ipſius x, & deſcendente per dignitates z. Hinc ubi eſt $z = c$, erit $x = a + bc^{n}$. Pro $a + bc^{n}$ ſcribe d, atque erit d valor ipſius x quando ſeries tota debet evaneſcere. Itaque facto $\dot{r} = \dot{z}z^{\theta-1}$, $s = x^{\lambda-1}$, & pro $\dot{w}$ ſumpto $\dot{x} = nb\dot{z}z^{n-1}$, exiſtentibus

$\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}$, &c. iisdem ac in exemplo præcedenti, invenientur fluentes $\acute{s}, \acute{\acute{s}}, \acute{\acute{\acute{s}}}$, &c. modo sequenti.

Est $\acute{s}$ fluens ipsius $\dot{w}s$, h. e. ipsius $\dot{x}x^{\lambda-1}$. Hujus fluens pura est $\frac{x^{\lambda}}{\lambda}$, quare ut evanescat $\acute{s}$ ubi est $x = d$, hinc dempto $\frac{d^{\lambda}}{\lambda}$ fit $\acute{s} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda} - \frac{d^{\lambda}}{\lambda}$. Et per similes correctiones fit

$$\acute{s} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda} - \frac{d^{\lambda}}{\lambda}$$

$$\acute{\acute{s}} = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1.\lambda} - \frac{d^{\lambda}x}{1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1}}{1.\lambda+1}$$

$$\acute{\acute{\acute{s}}} = \frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2.\lambda+1.\lambda} - \frac{d^{\lambda}x^{2}}{2.1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1}x}{1.1.\lambda+1} - \frac{d^{\lambda+2}}{2.1.\lambda+2}$$

& sic porrò.

Cæterum ex terminis jam appositis satis constat ratio formandi reliquos.

SCHOLIUM.

1. Potest fluxio proposita variis modis resolvi in factores $\dot{r}$ & s, unde plerumque oriuntur series diversæ. Sic fluxio jam proposita $\dot{z}z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{n}}|^{\lambda-1}$ etiam sic scribi potest $\dot{z}z^{\theta+\lambda n-n-1} \times \overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}$. Ubi si pro $\dot{r}$, s, & $\dot{w}$ sumantur $\dot{z}z^{\theta+\lambda n-n-1}$, $\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}$, & $-na\dot{z}z^{-n-1}$, & pro $a+bz^{n}$ scribatur x, exprimetur eadem fluens per series sequentes;

$$\left|\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}\right| = \frac{z^{\theta}x^{\lambda-1}}{\theta+\lambda n-n} + \frac{\lambda n-n}{\theta+\lambda n-2n}\cdot\frac{a}{x}A + \frac{\lambda n-2n}{\theta+\lambda n-3n}\cdot\frac{a}{x}B + \frac{\lambda n-3n}{\theta+2\lambda n-4n}\cdot\frac{a}{x}C + \&c.$$

$$\left|\dot{z}z^{\theta-1}x^{\lambda-1}\right| = \frac{-z^{\theta}x^{\lambda}}{\lambda na} + \frac{\theta+\lambda n}{\lambda n+n}\cdot\frac{x}{a}A + \frac{\theta+\lambda n+n}{\lambda n+2n}\cdot\frac{x}{a}B + \frac{\theta+\lambda n+2n}{\lambda n+3n}\cdot\frac{x}{a}C + \&c.$$

Ubi literæ A, B, C, &c. ſcribuntur pro totis terminis cum ſuis ſignis in ſeriebus reſpectivis.

2. In inveſtigatione Theorematis inveniebatur $\left|\dot{r}s\right| = rs - \left|r\dot{s}\right|$. Unde ſi pro $\dot{r}$ & s ſumantur $\dot{z}z^{\theta}$ & $\overline{a+bz^{n}}|^{\lambda}$, & pro $a+bz^{n}$ ſcribatur x, erit $\left|\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}\right| = \frac{z^{\theta+1}x^{\lambda}}{\theta+1} - \left|\frac{\lambda nb\dot{z}}{\theta+1}z^{\theta+n}x^{\lambda-1}\right|$, hoc eſt, $\left|\dot{z}z^{\theta+n}x^{\lambda-1}\right| = \frac{z^{\theta+1}z^{\lambda}}{\theta+1} - \frac{\lambda nb}{\theta+1}\left|\dot{z}z^{\theta+1}x^{\lambda-1}\right|$. Datâ itaque fluente ipſius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$, dabitur etiam fluens ipſius $\dot{z}z^{\theta+n}x^{\lambda-1}$. Unde ſi pro n ſumantur ſucceſſivè numeri quicunque integri, vel affirmativi, vel negativi, ſi datur fluens unius $\dot{z}z^{\theta\pm n}x^{\lambda-n}$, dabuntur etiam fluentes omnium $\dot{z}z^{\theta\pm n}x^{\lambda-n}$.

3. Poteſt etiam eadem fluxio ſic ſcribi $\dot{z}z^{\theta+\lambda n}\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}$: ubi ſi jam pro $\dot{r}$ ſumatur $\dot{z}z^{\theta+\lambda n}$, & pro s ſumatur $\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}$, erit

$$\left|\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}\right| = \frac{z^{\theta+\lambda n+1}\times\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda}}{\theta+\lambda n+1} + \frac{\lambda na}{\theta+\lambda n+1}\left|\dot{z}z^{\theta+\lambda n-n}\times\overline{b+az^{-n}}|^{\lambda-1}\right|$$

hoc

hoc est $\overline{\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}}| = \frac{z^{\theta+1}x^{\lambda}}{\theta+\lambda n+1} + \frac{\lambda n a}{\theta+\lambda n+1}\overline{\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda-1}}|$. Datâ itaque fluente ipsius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$, dabitur etiam fluens ipsius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda-1}$, & vice versâ. Manente itaque indice θ, si continuo minuatur, vel augeatur λ per unitates, datâ fluente unius $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$, dabuntur fluentes omnium $\dot{z}z^{\theta}x^{\lambda}$. Et per hos duos casus conjunctos, si pro σ & τ scribantur successivè numeri quicunque integri, vel affirmativi vel negativi, manentibus θ & λ, si datur fluens unius cujusvis fluxionis $\dot{z}z^{\theta+\sigma n} \times \overline{a+bz^{n}}|^{\lambda+\tau}$, dabuntur etiam fluentes omnium fluxionum eodem modo provenientium. Et ad eundem modum pergere licet ad comparationem fluentum, ubi quantitas in vinculo radicis est trium, vel quatuor, vel plurium nominum. Sed hæc jam elegantius fiunt ab illustrissimo *Newtono* in Quadraturâ Curvarum.

PROP. XII. THEOR. V.

Sit n index ordinis fluentis ipsius $Q = r\dot{\dot{s}}$, verbi gratiâ si $n = 2$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{''}{Q}$, si $n = 0$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{0}{Q} = Q$, si $n = -1$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{-1}{Q} = \dot{Q}$, & sic de cæteris; tum erit $\overset{n}{Q} = r\overset{n}{s} - \frac{n}{1}\dot{r}\overset{n}{\dot{s}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\ddot{r}\overset{n}{\ddot{s}} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\dddot{r}\overset{n}{\dddot{s}} +$ &c. Ubi est $\underset{\cdot}{n} = 1$, & (juxtà notationem nostram) sunt $\dot{n} = n - \underset{\cdot}{n}$, $\underset{:}{n} = n + \underset{\cdot}{n}$, $\underset{\vdots}{n} = \underset{:}{n} + \underset{\cdot}{n}$, & sic porrò.

Quando est $n = 1$ Theorema idem est cum præcedenti; unde colligitur forma seriei. Coefficientes autem 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{\underset{,}{n}}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{\underset{,}{n}}{2} \times \frac{\underset{,,}{n}}{3}$, &c. sic investigo.

Sint coefficientes quæsiti x, v, y, w, &c. iidemque incrementis suis $\underset{.}{x}$, $\underset{.}{v}$, $\underset{.}{y}$, $\underset{.}{w}$, &c. aucti $\underset{,}{x}$, $\underset{,}{v}$, $\underset{,}{y}$, $\underset{,}{w}$, &c. Si ergò fit $\overset{n}{Q} = x\,r^{\dot{n}}\,s + v\,r^{n}\,\dot{s} + y\,r^{\underset{,}{n}}\,\ddot{s} + w\,r^{\underset{,,}{n}}\,\dddot{s} +$ &c. erit proximè $\overset{\underset{,}{n}}{Q} = \underset{,}{x}\,r^{n}\,s + \underset{,}{v}\,r^{\underset{,}{n}}\,\dot{s} + \underset{,}{y}\,r^{\underset{,,}{n}}\,\ddot{s} + \underset{,}{w}\,r^{\underset{,,,}{n}}\,\dddot{s} +$ &c. Jam si coefficientes x, v, y, w, &c. sint justi valoris, manentibus coefficientibus novis $\underset{,}{x}$, $\underset{,}{v}$, $\underset{,}{y}$, $\underset{,}{w}$, &c. si capiatur fluxio novæ seriei fiet regressio in seriem priorem. Ergò capiendo fluxiones primo in $\dot{r}$, deinde in s, fit

$$\overset{n}{Q} = \underset{,}{x}\,r^{\dot{n}}\,s + \underset{,}{\underset{.}{v}}\,r^{n}\,\dot{s} + \underset{,}{\underset{.}{y}}\,r^{\underset{.}{n}}\,\ddot{s} + \underset{,}{\underset{.}{w}}\,r^{\underset{.,}{n}}\,\dddot{s} + \text{\&c.}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \underset{,}{\underset{.}{x}} \qquad + \underset{,}{v} \qquad + \underset{,}{y}$$

Unde comparando terminos hujus seriei cum terminis relativis seriei prioris, fit $\underset{,}{\underset{.}{x}} \; (= x + \underset{.}{x}) = x$; adeoq; $\underset{.}{x} = 0$. Proinde est x invariabilis. Sed ubi $n = 0$ est $x = 1$; quare est semper $x = 1$. Comparando terminos secundos, fit $\underset{,}{v} + \underset{,}{x} \; (= v + \underset{.}{v} + 1) = v$; adeoque $\underset{.}{v} \; (= -1) = -\underset{.}{n}$; &

 inde

inde $v = \frac{-n}{1} + a$. Sed ubi $n = 0$, est $v = 0$; quare est $a = 0$, & $v = \frac{-n}{1}$. Comparando terminos tertios fit $\underset{,}{y} + \underset{,}{v} \,(= \underset{,}{y} + \dot{y} - \dot{n}_1) = y$; adeoque $\dot{y} = \dot{n}_1$; & inde $y = n_1 \underset{,}{n}_2 + b$. Sed ubi $n = 0$, est $y = 0$; ergo est $b = 0$, atque $y = n_1 \underset{,}{n}_2$. Eodem modo fit $\dot{w} + \underset{,}{y} \,(= w + \dot{w} + \dot{n}\,\underset{,}{\dot{n}}) = y$; adeoque $\ddot{w} = - \underset{,}{n}_1 \underset{,,}{n}_2$ & inde $w = - n_1 \underset{,}{n}_2 \underset{,,}{n}_3$. Et sic pergendo in infinitum invenientur reliqui coefficientes, omnino ut in Theoremate exhibentur.

EXEMPLUM.

Hoc pacto ipsius $Q = \dot{z} z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n}|^{\lambda-1}$ $(= \dot{z} z^{\theta-1} x^{\lambda-1})$ fluens quævis in genere est

vel 1. $$\overset{n}{Q} = \frac{{}^{n} b^{\dot{n}} z^{\theta+\dot{n}n} x^{\lambda-1}}{\theta.\theta+n.\theta+2n \ldots \theta+\dot{n}n} + \frac{n-\lambda n}{\theta+\dot{n}n}\cdot\frac{nbz^n}{1.x}A + \frac{2n-\lambda n}{\theta+\underset{,}{n}n}\cdot\frac{nb\dot{z}^n}{2x}B + \frac{3n-\lambda n}{\theta+\underset{,,}{n}n}\cdot\frac{nb\ddot{z}^n}{3x}C + \&c.$$

vel 2. $$\overset{n}{Q} = \frac{z^{\theta-n} x^{\lambda+\dot{n}}}{\lambda.\lambda+1.\lambda+2 \ldots \lambda+\dot{n}.nb} + \frac{n-\theta}{\lambda n+nn}\cdot\frac{nx}{1bz^n}A + \frac{2n-\theta}{\lambda n+\underset{,}{n}n}\cdot\frac{n\dot{x}}{2bz^n}B + \frac{3n-\theta}{\lambda n+\underset{,,}{n}n}\cdot\frac{n\ddot{x}}{3bz^n}C + \&c.$$

vel

$$\text{vel } 3.\ \overset{\bar n}{Q} = \frac{\overline{-na}|^{\dot n}\, z^{\theta-\dot n n}\, x^{\lambda-1}}{\theta-n+\lambda n.\theta-n+\lambda n-n.\theta-n+\lambda n-2n\ldots\theta-n+\lambda n-\dot n n} +$$

$$\frac{\lambda n - n}{\theta-n+\lambda n-nn}\cdot\frac{na}{1x}A + \frac{\lambda n-2n}{\theta-n+\lambda n-\dot{n}n}\cdot\frac{\dot{na}}{2x}B + \&c.$$

$$\text{vel } 4.\ \overset{n}{Q} = \frac{-x^{\lambda+\dot n}\, z^{\theta+\dot n\lambda n-\dot n n}}{\lambda.\lambda+1.\lambda+2\ldots\lambda+\dot n.na} + \frac{\theta+\lambda n}{\lambda n+nn}\cdot\frac{nx}{1a}A +$$

$$\frac{\theta+\lambda n+n}{\lambda n+\acute{n}n}\cdot\frac{\acute{nx}}{2a}B + \&c.$$

Quippe in seriebus duabus primis pro $\dot w$ sumpto $nbz\dot z^{n-1}$, & facto $\acute{Q} = \boxed{\dot w Q}$, $\overset{\prime\prime}{Q} = \boxed{\dot w \acute{Q}}$, & sic porrò; & in seriebus duabus ultimis pro $\dot w$ sumpto $-naz\dot z^{-n-1}$, & similiter facto $\acute{Q} = \boxed{\dot w Q}$, $\overset{\prime\prime}{Q} = \boxed{\dot w \acute{Q}}$, & sic porrò.

Per has autem series exhibentur tam fluxiones quam fluentes ipsius Q. Sic si $n = -1$, series dabit valorem $\dot Q$, si $n = -2$, series dabit valorem $\ddot Q$, & sic porro.

Sed in hoc casu, ubi mutatur signum numeri n, quædam est difficultas in inventione coefficientis termini primi. Sit ergo exemplum methodi hoc faciendi in termino primo seriei primæ modo exhibitæ pro valore $\overset{n}{Q}$. Hujus termini coefficiens, seposito $\overset{\dot n}{n}\, b^{\dot n}$, est $\frac{1}{\theta.\theta+n.\theta+2n\ldots\theta+\dot n n}$. Debet autem hujus coefficientis

is maximus divisor esse $\theta + \grave{n}n$. Quare ut inveniatur coefficiens ubi est $\grave{n}$ numerus negativus, vice $\frac{1}{\theta . \theta + n . \theta + 2n \ \&c.}$, scribe $\frac{\&c. \ \theta - 4n . \theta - 3n . \theta - 2n . \theta - n .}{\&c. \ \theta - 4n . \theta - 3n . \theta - 2n . \theta - n . \theta . \theta + n . \theta + 2n . \&c}$. Tum rejectis omnibus divisoribus post $\theta + \grave{n}n$, quando est $\grave{n} = 1$, coefficiens erit $\frac{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n}{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n . \theta . \theta + n}$, hoc est, $\frac{1}{\theta . \theta + n}$; quando est $\grave{n} =$ 0, erit coefficiens $\frac{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n}{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n . \theta}$, hoc est $\frac{1}{\theta}$. Et eodem argumento ubi $\grave{n} = -1$, erit coefficiens $\frac{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n}{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n}$, hoc est 1; ubi $\grave{n} = -2$ erit coefficiens $\frac{\&c. \ \theta - 2n . \theta - n}{\&c. \ \theta - 2n}$, hoc est $\theta - n$, ubi est $\grave{n} = -3$, coefficiens erit $\overline{\theta - 2n} . \overline{\theta - n}$; & sic porro. Unde jam si sit m index fluxionis quæsitæ ipsius Q, hoc est si pro $-\grave{n}$ scribatur m, erit $\overline{\theta - mn} . \overline{\theta - \grave{m}n} . \overline{\theta - \grave{\grave{m}}n} \ldots \overline{\theta - n}$ coefficiens numeralis termini primi seriei quæsitæ.

SCHOLIUM.

Pergere jam liceret ad inventionem integralium in terminis numero finitis, quarum incrementa singularia dantur per æquationes affectas altiorum graduum. Sed quoniam in his casibus solutio quæri non potest nisi per calculum valde nimis prolixum, operæ pretium non duxi præcepta plura tradere in re nullius usus futurâ. Æquationes quadraticæ revocantur ad æquationes simplices per extractionem radicis, atque æquationes cubicæ resolvuntur per regulam *Cardani*, & æquationes plurium dimensionum etiam resolvi possunt per ablationem terminorum intermediorum. Quare si cui animus est rem adeo laboriosam tentare, terminis omnibus intermediis

diis exterminatis, deinde ſolutio quæri poteſt per Propoſitiones præcedentes. Tantum autem laborem paululum minuere poteſt hæc obſervatio, nempe quod in æquatione affectâ definiente valorem incrementi, termini ſecundi coefficiens eſt ſimile incrementum coefficientis termini ſecundi in æquatione definiente valorem ipſius integralis. Quare facto periculo in coefficiente termini ſecundi, ſi is revocari nequit ad integralem in terminis numero finitis, fruſtra erit ſolutionem finitam quærere in cæterâ æquatione.

Principiis Methodi Incrementorum & Methodi Fluxionum jam breviter explicatis, ſupereſt ut in parte alterâ hujus opuſculi exemplis aliquot oſtendamus, quantus ſit uſus hujus rei in ſolutione difficiliorum quorundam Problematum.



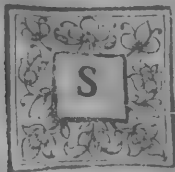
METHODUS Incrementorum.

PARS SECUNDA.

Ubi Exemplis aliquot ostenditur quomodo hæc Methodus sit applicanda ad Problemata Mathematica & Physica.

PROP. XIII. PROB. VIII.

Datis aliquot terminis æquedistantibus in Serie quantitatum, invenire terminos intermedios, & ulteriores quam proximè ex datis eorum distantiis ab alterutro termino extremo dato.



UNTO a, b, c, d, termini æquedistantes dati, & requiratur terminus alius aliquis ex datâ suâ distantiâ a termino extremo a.

Sumantur terminorum datorum differentiæ, deinde differentiarum differentiæ, & sic porrò, donec perventum sit ad differentiam

ferentiam ultimam, & ſint differentiæ illæ ſub propriis ſignis $\underset{.}{a}\,(=b-a,)$ $\underset{.}{b}\,(=c-b,)$ $\underset{.}{c}\,(=d-c,)$ $\underset{..}{a}\,(=\underset{.}{b}-\underset{.}{a},)$ $\underset{..}{b}\,(=\underset{.}{c}-\underset{.}{b},)$ $\underset{\therefore}{a}\,(=\underset{..}{b}-\underset{..}{a}.)$ Iam pro quolibet termino ſeriei in genere ſcribe x, & pro ejuſdem termini diſtantiâ a termino a ſcribe z, & ſit ipſius z incrementum $\underset{.}{z}$ æquale diſtantiæ datæ inter terminos datos a, b, c, d, atque finge omnes terminos ſeriei in genere exprimi per æquationem $x = A + Bz + Cz\dot{z} + 3Dz\dot{z}\ddot{z}$. Tum (per *Prop.* I.) differentia inter duos valores ipſius x ad diſtantiam ab invicem $\underset{.}{z}$ exprimetur per æquationem $\underset{.}{x} = B\underset{.}{z} + 2Cz\underset{.}{z} + 3Dz\dot{z}\underset{.}{z}$, & hujuſmodi differentiarum differentiæ exprimentur per æquationem $\underset{..}{x} = 2C\underset{.}{z}^2 + 2.\,3Dz^2\underset{.}{z}$, & differentia tertia per æquationem $\underset{\therefore}{x} = 2.\,3D\underset{.}{z}^3$. Sed ubi eſt $z = 0$, ſunt $x = a$, $\underset{.}{x} = \underset{.}{a}$, $\underset{..}{x} = \underset{..}{a}$, $\underset{\therefore}{x} = \underset{\therefore}{a}$; unde per has æquationes fiunt $A = a$, $B\underset{.}{z} = \underset{.}{a}$, $2C\underset{.}{z}^2 = \underset{..}{a}$, $2.\,3D\underset{.}{z}^3 = \underset{\therefore}{a}$, adeoque $A = a$, $B = \frac{\underset{.}{a}}{\underset{.}{z}}$, $C = \frac{\underset{..}{a}}{2\underset{.}{z}^2}$

$D = \frac{\underset{\therefore}{a}}{2.\,3\underset{.}{z}^3}$, & exinde

$$x = a + \frac{\underset{.}{a}}{\underset{.}{z}}z + \frac{\underset{..}{a}}{2\underset{.}{z}^2}z\dot{z} + \frac{\underset{\therefore}{a}}{2.\,3\underset{.}{z}^3}z\dot{z}\ddot{z}.\quad \textit{Q.E.I.}$$

Hæc æquatio convenit accurate cum ipſis terminis datis a, b, c, d, & quam proximè cum intermediis & ulterioribus. Sed quo plures termini dentur, conſtat eo propius acceſſuram hanc æquationem ad valores omnium terminorum, tum intermediorum, tum & ulteriorum. Quare ſi ſeries terminorum datorum continuetur in infinitum, æquatio tandem coincidet accuratè cum valoribus terminorum omnium, cum intermediorum, tum ulteriorum. Proinde ſi detur

detur lex formandi terminos æquidistantes in serie aliquâ, per hanc propositionem dabitur series infinita exprimens valores omnium terminorum intermediorum etiam & ulteriorum totius seriei.

EXEMPLUM.

Sit hujus rei exemplum in serie terminorum, ubi termini æquidistantes semper sunt in ratione continuâ Geometricâ. In hâc serie sint a & $a+ab$ termini duo ad distantiam z; tum ex natura hujus progressionis erunt omnes termini ad eandem distantiam a, $a+ab$, $a \times \overline{1+b}|^2$ $a \times \overline{1+b}|^3$, &c. & differentiæ primæ hujusmodi terminorum erunt ab, $ab \times \overline{1+b}$, $ab \times \overline{1+b}|^2$, &c. differentiæ secundæ erunt ab^2, $ab^2 \times \overline{1+b}$, $ab^2 \times \overline{1+b}|^2$, &c. differentiæ tertiæ erunt ab^3, $ab^3 \times \overline{1+b}$, $ab^3 \times \overline{1+b}|^2$, &c. & sic porrò. Unde ad mentem hujus Propositionis erunt $a = a$, $\dot{a} = ab$, $\ddot{a} = ab^2$, $\dddot{a} = ab^3$, &c. adeoque si z sit distantia alicujus termini x a termino a erit $x = a + \frac{abz}{1\,z} + \frac{ab^2 z\dot{z}}{1.\,2z^2} + \frac{ab^3 z\dot{z}\ddot{z}}{1.\,2.\,3z^3} +$ &c. vel $\frac{x}{a} = 1 + \frac{bz}{1\,z} + \frac{b^2 z\dot{z}}{1.2z^2} + \frac{b^3 z\dot{z}\ddot{z}}{1.\,2.\,3z^3}$ $+$ &c. Sed in hoc casu est $\frac{x}{a} = \overline{1+b}|^{\frac{z}{z}}$, unde fit $\overline{1+b}|^{\frac{z}{z}} = 1 + \frac{bz}{1z} + \frac{b^2 z\dot{z}}{1.\,2z^2} + \frac{b^3 z\dot{z}\ddot{z}}{1.2.3z^3} +$ &c. Coincidit hæc series cum Theoremate *Newtoniano* pro inventione dignitatis Binomii.

Quod Theorema etiam investigari potest ad hunc modum.

Sit $\overline{a+b}|^{n} = a^{n} + xba^{n-1} + vb^2a^{n-2} + zb^3a^{n-3} +$ &c. Tum

ductâ ſerie in $a + b$ erit $\overline{a+b}|^{n+1}$, vel juxta notationem noſtram $\overline{a+b}|^{\overset{n}{\prime}}$ æquale.

$$\overset{n}{a'} + xba^{\overset{n-1}{\prime}} + vb^2a^{\overset{n-2}{\prime}} + zb^3a^{\overset{n-3}{\prime}} + \&c.$$
$$\quad + 1 \qquad + x \qquad + v$$

Unde exiſtente $n = 1$, per Methodum Incrementorum erit $\dot{x} = 1$, adeoque $x = \frac{n}{1}$; $\dot{v} = x (= n,)$ adeoque $v = \frac{n\grave{n}}{1.2}$; $\dot{z} = v (= \frac{n\grave{n}}{1.2.})$ adeoq; $z = \frac{n\grave{n}\grave{\grave{n}}}{1.2.3}$; & ſic porrò; (ubi ſumuntur omnes integrales purè, quoniam debent omnes evaneſcere ubi eſt $n = 0$,) unde fit

$$\overline{a+b}|^n = a^n + \frac{n}{1} ba^{n-1} + \frac{n\grave{n}}{1.2} b^2a^{n-2} + \frac{n\grave{n}\grave{\grave{n}}}{1.2.3} b^3a^{n-3} + \&c.$$

hoc eſt $\overline{a+b}|^n = a^n + \frac{n}{1}\frac{b}{a}A + \frac{n-1}{2}\frac{b}{a}B + \frac{n-2}{3}.\frac{b}{a}C + \&c.$ nempe pro ſingulis terminis ſeriei cum propriis ſignis ſcriptis A, B, C, &c.

PROP. XIV. PROB. IX.

Datâ ratione formandi terminos in ſerie quantitatum, invenire aggregatum terminorum quotvis æquidiſtantium.

Si ſit x ſumma quæſita, eadem aucta termino amplius uno erit $x + \dot{x}$. Quare datá lege formandi terminos ſi fiat $\dot{x}$ æqualis termino proxime addendo, dabitur integralis x in terminis generalibus, per

Prop. 10. Quæ ut fiat æqualis ſummæ quæſitæ, demendus eſt valor ejuſdem integralis, qui prodit quando debet ſumma quæſita eſſe nihil.

EXEMP. I.

Sit exemplum in ſerie terminorum æquedistantium, a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. In hac ſerie pro termino ultimo ſemper ſcripto z, erit $\underset{\cdot}{z}=b$, atque terminus ſummæ quæſitæ proxime addendus erit $z+\underset{\cdot}{z}$, vel $\underset{\prime}{z}$; adeoque erit $\underset{\cdot}{x}=\underset{\prime}{z}$. Unde regrediendo ad integrales erit $x=\dfrac{z\underset{\prime}{z}}{2\underset{\cdot}{z}}+A$. Debet autem hæc ſumma æquari nihilo, quando terminus proxime addendus eſt a, hoc eſt, quando eſt $\underset{\prime}{z}=a$, adeoque & $z=a-\underset{\cdot}{z}$; adeoque a ſumma

$$\frac{z\underset{\prime}{z}}{2\underset{\cdot}{z}}+A, \text{ ablata ſumma } \frac{\overline{a-\underset{\cdot}{z}}\times a}{2\underset{\cdot}{z}}+A, \text{ reſiduum } \frac{z\underset{\prime}{z}-\overline{a-\underset{\cdot}{z}}\times a}{2\underset{\cdot}{z}}$$

erit ſumma quæſita, (pro $\underset{\cdot}{z}$ reſtituto b)

$$x=\frac{z\times\overline{z+b}-\overline{a-b}\times a}{2b}.$$

EXEMP. II.

Ad eundem modum ſi terminus ultimus ſit $z\underset{\prime}{z}$, atque terminus primus is ſit in quo eſt $z=a$, hoc eſt $a\times\overline{a+\underset{\cdot}{z}}$, termino poſt ultimum proximè addendo exiſtente $\underset{\prime}{z}\underset{\prime\prime}{z}$, erit $\underset{\cdot}{x}=\underset{\prime}{z}\underset{\prime\prime}{z}$; adeoque

$$x=\frac{z\underset{\prime}{z}\underset{\prime\prime}{z}}{3\underset{\cdot}{z}}-\frac{\overline{a-\underset{\cdot}{z}}\times a\times\overline{a+\underset{\cdot}{z}}}{3\underset{\cdot}{z}}.$$

Et ad eundem modum pergere licet ad ſummationes terminorum, in quibus ſunt plures factores $z\times\underset{\prime}{z}\times\underset{\prime\prime}{z}\times$ &c.

EXEMP.

EXEMP. III.

Inveniendum sit aggregatum terminorum, quorum ultimus semper est $\frac{1}{z z_{\prime}}$, & quorum primus is est in quo est $z = a$. In hoc casu terminus summæ quæsitæ proxime addendus est $\frac{1}{z_{\prime} z_{\prime\prime}}$. Quare facto $\underset{.}{x} = \frac{1}{z_{\prime} z_{\prime\prime}}$, deinde regrediendo ad integrales erit $x = A - \frac{1}{\underset{.}{z} z_{\prime}}$.

Sed ubi terminus proxime addendus est $\frac{1}{a \times \overline{a + \underset{.}{z}}}$, hoc est, ubi est $z = a$, debet summa quæsita æquari nihilo; unde fit $A = \frac{1}{\underset{.}{z} a}$ adeoque $x = \frac{1}{\underset{.}{z} a} - \frac{1}{\underset{.}{z} z_{\prime}}$.

COROLLARIUM.

Et hinc datur summa omnium terminorum $\frac{1}{a.\overline{a+\underset{.}{z}}} + \frac{1}{\overline{a+\underset{.}{z}}.\overline{a+2\underset{.}{z}}} + \frac{1}{\overline{a+2\underset{.}{z}}.\overline{a+3\underset{.}{z}}}$ + &c. in infinitum. Nam in hac serie in infinitum continuata in termino ultimo est divisor z infinitus. Proinde evanescente termino $\frac{1}{\underset{.}{z} z_{\prime}}$ in valore x fit $x = \frac{1}{\underset{.}{z} a}$.

Et ad eundem modum pergere licet ad summas terminorum in quibus sunt plures divisores $z, z_{\prime}, z_{\prime\prime}$, &c.

PROP.

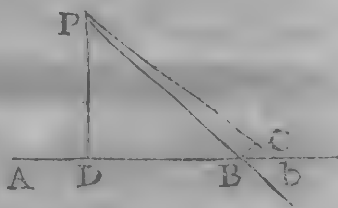
PROP. XV. PROB. X.

Invenire Fluxiones in datis Figuris Geometricis.

Hoc quomodo ſit faciendum exemplis melius, quam præceptis patebit.

EXEMP. I.

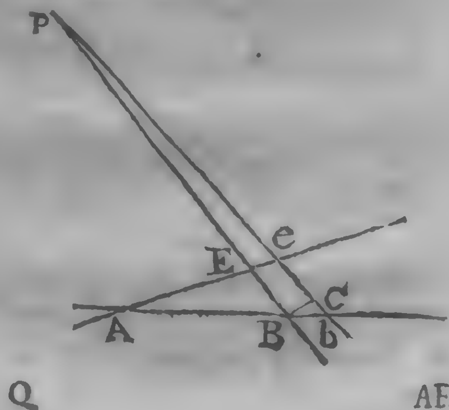
Sit ergò primum exemplum in figura APB, ubi datis poſitione rectâ AB, & puncto P, quæritur ratio fluxionum rectæ AB, & diſtantiæ PB.



" Progrediatur recta PB de loco
" ſuo PB in locum novum P*b*. In
" P*b* capiatur PC = PB, & ad AB
" ducatur PD ſic, ut angulus *b*PD æqualis ſit angulo *b*BC; & ob
" ſimilitudinem triangulorum *b*BC, *b*PD, erit augmentum B*b* ad
" augmentum C*b*, ut P*b* ad D*b*. Redeat jam P*b* in locum ſuum
" priorem PB, ut augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium ratio
" ultima, id eſt ratio ultima P*b* ad D*b*, ea erit quæ eſt PB ad DB,
" exiſtente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione eſt fluxio
" ipſius AB ad fluxionem ipſius PB.

EXEMP. II.

" Recta PB circa datum po-
" lum P revolvens ſecet alias
" duas poſitione datas rectas
" AB & AE in B & E: quæ-
" ritur proportio fluxionum
" rectarum illarum AB & AE.



" Progrediatur recta revol-
" vens PB de loco ſuo PB in
" locum novum P*b* rectas AB

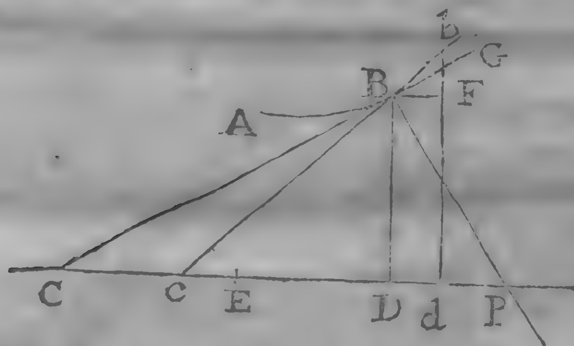
" AE in punctis *b* & *e* secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur
" ipsi P*b* occurrens in C, & erit B*b* ad EC ut A*b* ad A*e*, & BC ad
" E*e* ut PB ad PE, & conjunctis rationibus B*b* ad E*e* ut A*b* × PB
" ad A*e* × PE. Redeat jam linea P*b* in locum suum priorem PB,
" & augmentum evanescens B*b* erit ad augmentum evanescens E*e*
" ut AB × PB ad AE × PE, ideoque in hâc ratione est fluxio rectæ
" AB ad fluxionem rectæ AE.

" Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis curvas positione datas
" secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE curvas
" illas tangant in sectionum punctis B & E; erit fluxio curvæ quam
" recta AB tangit ad fluxionem curvæ quam recta AE tangit ut
" AB × PB ad AE × PE. Id quod etiam eveniet si recta PB cur-
" vam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Petuntur hæc duo exempla ex *Newtonianis*.

EXEMP. III.

Sit AB curva quævis positione data, & ab ejus puncto quovis B ducatur recta BD secans rectam positione datam ED in angulo dato in D; quæritur proportio fluxionum, abscissæ ED, ordinatæ DB, & curvæ AB.



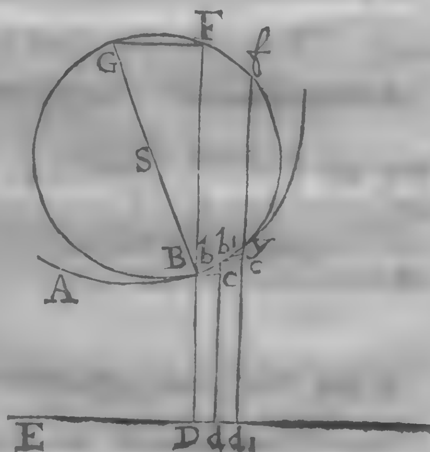
Moveatur ordinata BD de loco suo BD in locum novum *bd*, & ducatur BF parallela ED, & occurrens *bd* in F, & per puncta *b* & B, ducatur *b*B occurrens ED in *c*, & ad punctum B ducatur tangens

gens occurrens ED, *db* in C & G. Tum ob similia triangula BF*b*, *c*DB, erit BF : F*b* : B*b* : : *c*D : DB : *c*B. Redeat jam ordinata *bd* in locum suum priorem BD, & rectâ *c*B jam coincidente cum tangente CB, erunt augmenta nascentia abscissæ ED, ordinatæ DB, & ipsius curvæ AB inter se, ut latera trianguli nascentis BFG, vel ei similis trianguli CDB; ideoque in hâc ratione erunt fluxiones rectarum ED, DB, & curvæ AB. Et si angulus BDE sit rectus, ductâ ad curvam normali BP occurrente ED in P, ob similia triangula BFG, BDP, erunt eædem fluxiones inter se ut latera trianguli BDP.

Hinc datâ ratione ducendi tangentes ad curvam aliquam propositam, dabitur proportio fluxionum abscissæ, ordinatæ, & ipsius curvæ; atque vicissim ex datâ proportione fluxionum abscissæ & ordinatæ, dabitur proportio inter subtangentem CD, ordinatam DB, & ipsam tangentem CB; ut & proportio inter ordinatam BD, subnormalem DP, & normalem BP. Datâ autem æquatione definiente relationem inter abscissam ED, & ordinatam DB, datur proportio fluxionum (per *Prop.* 1.) Quare per istam propositionem duci possunt tangentes & normales ad omnes curvas.

EXEMP. IV.

Sit curva quævis AB, & propositum sit invenire radium curvaturæ in puncto B, hoc est, radium circuli cujus curvatura eadem sit, quæ curvæ AB in puncto B.



Duc ordinatas tres æquidistantes BD, *bd*, *b*1 *d*1, secantes rectam positione datam ED ad angulos rectos in D, *d*, *d*1, & ipsi ED parallelas duc BC, *bc*, occurrentes *bd*, *b*1 *d*1, in C

&

&c, & duc Bb occurrentem $b_1 d_1$ in y, & per puncta tria B, b, b_1, transeat circulus cujus centrum sit S, occurrens DB & $d_1 b_1$ in F & f, & duc diametrum BG, atque FG. Sint autem abscissa $ED = z$, ordinata $DB = x$, & curva $AB = v$. Tum juxta Methodum Incrementorum erit $Dd = \dot{z}$ $(= dd_1 = BC = bc,)$ $Cb = \dot{x}$ $(= cy,)$ & $yb_1 = \ddot{x}$. Sit etiam $Bb = (by =) \dot{u}$. Tum ex natura circuli erit $yb_1 \times yf = yB \times yb$, hoc est $yf = \frac{2\dot{u}\dot{u}}{\ddot{x}}$. Sed coincidentibus punctis B, b, b_1, erit arcus evanescens Bbb_1 circulo & curvæ AB communis, ideoque in hoc casu erit circulus centro S descriptus curvæ AB æquicurvus in B. Evanescant itaque incrementa, & jam coincidente yf cum ipso BF, & facto $\frac{\dot{u}\dot{u}}{\ddot{x}} = \frac{\dot{v}\dot{v}}{\ddot{x}}$, erit $BF = \frac{2\dot{v}\dot{v}}{\ddot{x}}$. Sed coincidentibus punctis B & b, est BF ad BG, ut BC ad Bb, hoc est, ut $\dot{z}$ ad $\dot{v}$. Unde fit $BG = \frac{2\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}$, & radius curvaturæ

$$BS = \frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}.$$

Si sit p ad curvam normalis intercepta inter punctum B & axem ED, erit $\dot{v} = \frac{p\dot{z}}{x}$ (per *Ex.* 3.) Unde fit etiam radius curvaturæ

$$BS = \frac{p^3\dot{z}^2}{x^3\ddot{x}}.$$

Et hæc fiunt fluente uniformiter z. Sed si cupis invenire expressionem ejusdem radii ubi fluit uniformiter v, per æquationem $\dot{v}\dot{v} =$

$\dot{x}\dot{x} +$

$\dot{x}\dot{x} + \dot{z}\dot{z}$ (adhuc fluente uniformiter z) fiet $2\dot{v}\ddot{v} = 2\dot{x}\ddot{x}$, hoc est $\ddot{x} = \frac{\dot{v}\ddot{v}}{\dot{x}}$, & inde BS $= \frac{\dot{v}^2\dot{x}}{\ddot{v}\dot{z}}$. Jam ut fluat uniformiter v, pro $\ddot{v}$ scribe $\frac{-\ddot{z}\dot{v}}{\dot{z}}$ [per Prop. 3], vel neglecto signo quod solum indicat ipsum $\dot{z}$ decrescere crescente ED, quando curva est versùs axem convexa (ut in hoc schemate exhibetur,) BS $= \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$.

Sit hujus rei exemplum in quavis sectione conica, existente $ax^2 = dz^2 - da^2$; ubi est d semi-parameter ad semi-axem a, in quo sumitur abscissa z. Tum fluente uniformiter z, erit $2ax\dot{x} = 2dz\dot{z}$, adeoque $\dot{x} = \frac{dz\dot{z}}{ax}$: atque iterum capiendo fluxiones

$$\ddot{x} = \left(\frac{d\dot{z}\dot{z}ax - a\dot{x}dz\dot{z}}{a^2x^2} = \frac{da^2x^2\dot{z}^2 - d^2az^2\dot{z}^2}{a^3x^3} =\right)\frac{-d^2\dot{z}^2}{x^3}.$$

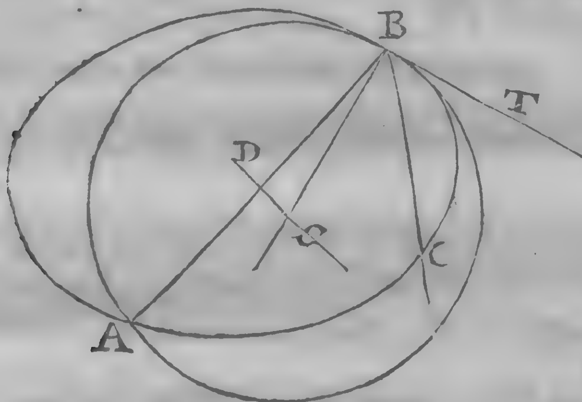
Unde fit

$$\text{BS} = \left(\frac{p^3\dot{z}^2}{x^3\ddot{x}} =\right)\frac{-p^3}{d^2};$$

ubi signum — tantùm indicat centrum S cadere infra punctum B, quod nos quæsivimus supra B. Ergò in omni sectione conicâ est radius curvaturæ quartum proportionale semiparametro ad utrumvis axem, & ad curvam normali terminatæ ad eundem axem. Quare ad extremitatem axis est radius curvaturæ æqualis ipsi semiparametro ad eundem axem. Sit enim a semi-axis ad cujus extremitatem quæritur radius curvaturæ, & d ejusdem semi-parameter; & sit p ad curvam normalis terminata ad axem alterum, (cujus semiparameter est $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$.) Tum erit radius curvaturæ $= \frac{p^3d}{a^3}$.

Sed in vertice diametri a eſt $p = a$; quare in hoc caſu eſt radius curvaturæ d. Hanc autem expreſſionem radii curvaturæ in coniſectionibus primus invenit clariſſimus *Newtonus*.

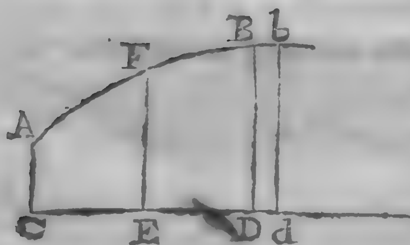
Cæterum deſcriptâ jam ſectione conicâ, poteſt idem radius determinari Geometricè per conſtructionem ſequentem.



Sit ABC data ſectio conica, & quæratur radius curvaturæ ad punctum B. Duc tangentem BT, eique perpendicularem BS, & ducatur BC parallela alterutri axium, atque fiat angulus CBA æqualis angulo CBT, & occurrat BA coniſectioni in A. Tum biſectâ AB in D, & erectâ perpendiculari DS occurrente BS in S, erit S centrum circuli oſculatorii. Hujus demonſtratio eſt perfacilis.

PROP. XVI. PROB. XI.

Curvas omnes quadrare.



Sit AB curva quadranda, cujus abſciſſa eſt CD, & ordinata DB. Moveatur ordinata de loco ſuo BD in locum novum *bd*, atq; ſpatium BD*db* erit augmentum areæ reſpondens abſciſſæ augmento

augmento D*d*. Redeat ordinata *bd* in locum ſuum priorem BD, atque erit ultimò ſpatium BD*db* æquale BD x D*d* ; quare ſi abſciſſa CD ſit z, & ordinata BD dicatur y, erit fluxio areæ æqualis $\dot{z}y$. Inventâ itaque fluente ipſius $\dot{z}y$ (per *Prop.* 10.) ſi dematur fluens proveniens per abſciſſam CE a fluente proveniente per abſciſſam CD, vel ſi invariabilis incognita in expreſſione fluentis determinetur faciendo fluentem provenientem per abſciſſam CE æqualem nihilo, dabitur area FEDB deſcripta per motum ordinatæ de EF in DB.

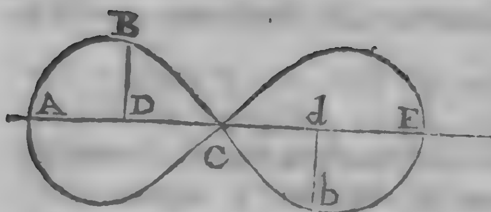
EXEMP. I.

Sit abſciſſa ad datum punctum C terminata CD $= z$, & ordinata DB $= y$, atque ſumptâ aliquâ lineâ pro unitate ſit $y = z^{n-1}$. Tum erit fluxio areæ æqualis $\dot{z}z^{n-1}$, cujus fluens eſt $\frac{z^n}{n} + A$. Sit data aliqua abciſſa CE $= a$, tum demptâ fluente $\frac{a^n}{n} + A$ a fluente $\frac{z^n}{n} + A$, (vel facto $\frac{a^n}{n} + A = 0$, unde fiat $A = \frac{-a^n}{n}$) erit $\frac{z^n}{n} - \frac{a^n}{n}$ æquale areæ adjacenti ad abſciſſam ED.

Ubi eſt n numerus negativus, ut ſit $y = z^{-n-1}$, erit area EFBD $= \frac{z^{-n}}{-n} - \frac{a^{-n}}{-n}$, hoc eſt $\frac{1}{na^n} - \frac{1}{nz^n}$. Si jam fiat abſciſſa z infinita, evaneſcente termino $\frac{1}{nz^n}$ fiet area EFBD adjacens abſciſſæ ultra ordinatam EF in infinitum productæ æqualis $\frac{1}{na^n}$. Et ſemper ubi fluentis ſignum contrarium eſt ſigno fluxionis, area per fluentem expreſſa adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ. Nam contrarietas ſignorum monſtrat fluentem minui dum augetur abſciſſa, & vice verſâ.

EXEMP.

EXEMP. II.

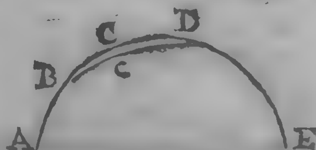


Sit curva quadranda ABC*b*, cujus abſciſsâ AD exiſtente z, ejus ordinatim applicata DB eſt $\overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$. Fluxio areæ in hac curva eſt $\dot{z} \times \overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$. Cujus fluens, purè ſumpta abſque correctione, eſt $\frac{1}{3}\overline{2z-z^2}|^{\frac{3}{2}}$. Eſt autem hæc fluens æqualis nihilo, vel ubi $z = 0$, vel ubi $z = 2$. Itaque in axe AD ſumpto AE = 2, terminatur area per hanc fluentem expreſſa, vel ad punctum A vel ad punctum E. Ubi eſt $z < 1$, (vel AC, exiſtente puncto C medio inter A & E) in primo caſu eſt area ADB, in ſecundo caſu eſt differentia inter areas C*b*EC atque CDBC. Sed ubi eſt z (= A*d*) > 1, in primo caſu eſt area differentia inter areas ABCA, atque C*db*C; in ſecundo caſu eſt area *db*E*d*.

Poſitiones hujuſmodi arearum colliguntur ex ſignis expreſſionum ordinatæ, atque areæ. Sic in caſu præſenti, exiſtente $z < 1$, tam ordinata quam area ſunt affirmativæ; quare aucta abſciſſa z, augetur area quæſita; quæ proinde eſt, vel ABD, vel differentia inter areas CE*b*C atque CBDC. Sed ubi eſt $z > 1$, ordinata, atque area ſigna habent contraria, nam in hoc caſu expreſſio ordinatæ $\overline{1-z} \times \overline{2z-z^2}|^{\frac{1}{2}}$ eſt quantitas negativa, expreſſione areæ $\frac{1}{3}\overline{2z-z^2}|^{\frac{3}{2}}$ ſemper exiſtente affirmativa;) unde creſcente abſciſſa z decreſcit area; adeoque exprimitur, vel per differentiam inter areas ABC & CD*b*, vel per aream *d*E*b*. Areæ autem *d*E*b* ſignum eſt affirmativum, quoniam adjacet tam abſciſſæ *d*E, quam ordinatæ *db* negativis.

LEM-

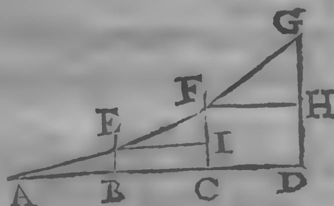
LEMMA III.



Si lineæ alicujus ABCDE figura talis ſit, ut factum aliquod toti lineæ reſpondens majus ſit, vel minus, quam ſimile factum ubi linea aliam induit figuram; etiam lineæ ejuſdem partis cujuſvis BCD figura talis erit, ut ei reſpondens facti pars major ſit, vel minor, quam ſi pars illa BCD aliam quamvis induat figuram BcD.

Nam ſi facti pars reſpondens lineæ BcD major ſit, vel minor, quam ſimile factum reſpondens lineæ BCD; tum conjunctim erit totum factum reſpondens lineæ ABcDE majus, vel minus, quam ſimile factum reſpondens Lineæ ABCDE, contra hypotheſin.

LEMMA IV.



In rectâ AB poſitione datâ ſumantur puncta quatuor æquidiſtantia A, B, C, D, & erigantur normales BE, CF, DG, per quarum terminos E, F, G ducantur rectæ AE, EF, FG, & ducatur FH parallela ipſi AB occurrens DG in H. Datis punctis A & G, & ſumma rectarum AE, EF, FG, quæritur ratio fluxionum linearum BE, GH, quando figura tota evaneſcit & fit AEFG elementum curvæ.

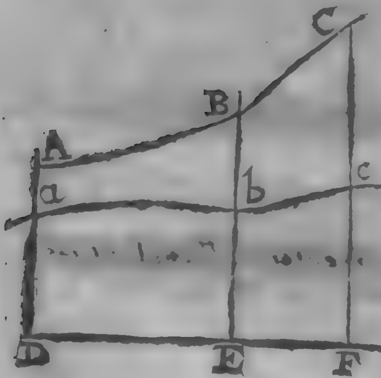
Duc EI parallelam ipſi AD & occurrentem CF in I atque

Sunto BE = a, IF = b, HG = c, AE = d, EF = e, FG = f. Tum ob datas ſummas $a + b + c$ (= DG,) & $d + e + f$, capi-

S endo

endo fluxiones erit $\dot{a} + \dot{b} + \dot{c} = 0$, (hoc est $\dot{b} = -\dot{a} - \dot{c}$,) item $\dot{d} + \dot{e} + \dot{f} = 0$. Sed ob datas AB, EI, FH, & ob angulos rectos in B, I, & H, sunt $\dot{d} = \frac{a\dot{a}}{d}$, $\dot{e} = \frac{b\dot{b}}{e}$ $\left(= \frac{-b\dot{a} - b\dot{c}}{e},\right)$ atq; $\dot{f} = \frac{c\dot{c}}{f}$. Quare est $\frac{a\dot{a}}{d} + \frac{-b\dot{a}}{e} - \frac{b\dot{c}}{e} + \frac{c\dot{c}}{f} = 0$, hoc est $\dot{c} : \dot{a} :: \frac{b}{e} - \frac{a}{d} : \frac{c}{f} - \frac{b}{e}$. Sed ubi AEFG est elementum curvæ, si sit ordinata x & curva v, erit $a = \dot{x}$, $b = \dot{x} + \ddot{x}$, $c = \dot{x} + 2\ddot{x} + \dddot{x}$, $d = \dot{v}$, $e = \dot{v} + \ddot{v}$, $f = \dot{v} + 2\ddot{v} + \dddot{v}$; adeoq; $\dot{c} : \dot{a} ::$ $\frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}} - \frac{\dot{x}}{\dot{v}} : \frac{\dot{x} + 2\ddot{x} + \dddot{x}}{\dot{v} + 2\ddot{v} + \dddot{v}} - \frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}}$; vel si pro $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ scribatur y, erit $\dot{c} : \dot{a} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Nam si $\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = y$, erit $\frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}} =$ $y + \dot{y}$, atque $\frac{\dot{x} + 2\ddot{x} + \dddot{x}}{\dot{v} + 2\ddot{v} + \dddot{v}} = y + 2\dot{y} + \ddot{y}$.

PROP. XVII. PROB. XII.



Detur positione recta DE, & ducta perpendiculari DA, per punctum A transeat curva ABC, cujus ordinata perpendicularis est BE; atque sit abc alia curva, cujus ordinata perpendicularis Eb quovis modo dato componitur ex abscissa communi DE, ordinatâ BE,

BE, & curva AB. Quæritur forma curvæ ABC, quando area DabE eſt omnium arearum per ordinatas bE hoc modo provenientes deſcriptarum maxima, ex data baſi DF, ordinatis DA, FC, & longitudine curvæ interceptæ ABC.

Sit abſciſſa DE $= z$, ordinata BE $= x$, curva AB $= v$, atque ordinata Eb $=$ P. Per *Lem.* 3. eadem proprietas convenit curvæ particulæ cuivis datæ. Sit ergo (vid. fig. *Lem.* 4.) punctum A extremitas ordinatæ BE in præſenti figurâ, atque ſit AEFG particula curvæ quæſitæ, & exiſtente P ordinata bE pertinente ad punctum A, ſit $\grave{P}$ ſimilis ordinata pertinens ad punctum E, atque $\grave{\grave{P}}$ tertia ordinata bE pertinens ad punctum F. Tum areæ DabE particula reſpondens curvæ particulæ AEFG erit $\dot{z}P + \dot{z}\dot{P}' + \dot{z}\dot{P}''$, quæ cum debeat eſſe extrema, ejus fluxio erit nihil (per method. maximorum & minimorum.) Fluxiones autem ſunt æſtimandæ per motus punctorum tantum E & F ſurſum & deorſum. Unde exiſtentibus $\ddot{z}$ & $\dot{P}$ æqualibus nihilo, ob defectum motus punctorum A, B, C, D, erit $\dot{z}\ddot{P}' + \dot{z}\ddot{P}'' = 0$, hoc eſt $\ddot{P}' + \ddot{P}'' = 0$.

Sit in genere $\dot{P} = Q\dot{z} + R\dot{x} + S\dot{v}$. Tum pro Q, R, & S pertinentibus ad puncta E & F ſcriptis Q, R, S, & Q', R', S'; atque pro $\dot{z}, \dot{x}, \dot{v}$, in valoribus ipſorum $\ddot{P}$ & $\ddot{P}'$ ſcriptis motibus punctorum E, B, F, & C, prout deſignantur in *Lemmate* 4. erit $\ddot{P}' = R\dot{a} + S\dot{d}$, atque $\ddot{P}'' = -\dot{R}'c - \dot{S}'f$, vel pro $\dot{d}$ & $\dot{f}$ ſcriptis ipſorum valoribus $\frac{a\dot{x}}{d}$ atque $\frac{c\dot{c}}{f}$) $\ddot{P} = R\dot{a} + S\frac{a\dot{x}}{d}$, atque $\ddot{P}' = -\dot{R}'c -$

S

$\acute{\dot{S}}\frac{\dot{c}\,\dot{c}}{f}$. Unde fit $\dot{c} : \dot{a} :: R + S\frac{a}{d} : \acute{R} + \acute{\dot{S}}\frac{c}{f}$. Sed (per *Lem.* 4.) eſt $\dot{c} : \dot{a} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Quare (ut in *Lemmate* iſto, pro $\frac{a}{d}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ ſcripto y, ut ſit etiam $\frac{c}{f} = y + 2\dot{y} + \ddot{y}$) erit $R + Sy : \overline{\dot{R} + \acute{S}} \times y + 2\dot{y} + \ddot{y} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Pro $\acute{R}$ & $\dot{S}$ ſcribe $R + \dot{R}$ atque $S + \dot{S}$, atque fiet $R + Sy : R + \dot{R} + Sy + 2S\dot{y} + S\ddot{y} + \dot{S}y + 2\dot{S}\dot{y} + \dot{S}\ddot{y} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$, atque dividendo $R + Sy : \dot{R} + 2S\dot{y} + S\ddot{y} + \dot{S}y + 2\dot{S}\ddot{y} + \dot{S}\dddot{y} :: \dot{y} : \ddot{y}$, vel (in primò conſequente rejectis evaneſcentibus $S\ddot{y}$, $2\dot{S}\ddot{y}$, & $\dot{S}\dddot{y}$,) $R + Sy : \dot{R} + 2S\dot{y} + \dot{S}y :: \dot{y} : \ddot{y}$, hoc eſt $\dot{R}\dot{y} - R\ddot{y} + \dot{S}y\dot{y} + 2S\dot{y}\dot{y} - Sy\ddot{y} = 0$. Eſt hæc æquatio fluxionalis irreducibilis; quare pro y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ſcriptis eorum valoribus per $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, & $\dot{v}$, $\ddot{v}$, $\dddot{v}$ expreſſis fiet $\dot{R}\dot{x}\dot{v}^2 - R\ddot{x}\dot{v}^2 + 3R\dot{x}\dot{v}\ddot{v} + \dot{S}\dot{x}\dot{x}\dot{v} + 2S\ddot{x}^2\dot{v} - S\dot{x}\dddot{x}\dot{v} + S\dot{x}\dot{x}\ddot{v} = 0$. Et ope hujus æquationis, una cum æquatione $\dot{v}\dot{v} = \dot{x}\dot{x} + \dot{z}\dot{z}$, (nempe pro R, $\dot{R}$, S, & $\dot{S}$, ſcriptis eorum valoribus per z, x, v, & eorum fluxiones expreſſis) dabuntur fluentes x, & v (per *Prop.* 6.) In reſolutione autem harum æquationum erunt quatuor coefficientes indeterminati, (per *Prop.* 5.) quorum duo determinantur faciendo $v = 0$, & $x = AD$ ad punctum D, atque reliqui duo determinantur faciendo $v =$ datæ longitudini ABC, & $x = FC$ ad punctum C.

COROLL. I.

Si curva v non ingreditur valorem ordinatæ P, exiſtente $S = 0$, erit $\dot{R}\dot{y} - R\ddot{y} = 0$. Qua æquatione comparata cum fluxione $n : 2$.

Schol.

Schol. Prop. 6. invenietur $\frac{R}{\dot{y}} = \frac{a}{\dot{z}}$. Ubi pro $\dot{y}$ ſcripto ipſius valore $\frac{\dot{z}^2\ddot{x}}{\dot{v}^3}$, fiet R $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}} = a$. Sed eſt $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}$ æquale radio curvaturæ (per *Prop.* 15. *Ex.* 4.) quare in hoc caſu eſt radius curvaturæ æqualis $\frac{a}{R}$.

C O R O L L. II.

Iiſdem poſitis, ſi in expreſſione ordinatæ P deſit etiam z, erit $R\dot{x} = \dot{P}$, quo pacto fiet $\frac{\dot{P}\dot{v}^3}{\dot{z}\dot{x}\ddot{x}} = a$. Vice $\dot{x}\ddot{x}$ ſcribe ipſius valorem $\dot{v}\ddot{v}$, atque hinc fiet $\dot{P} = \dot{z}a\ddot{v}\dot{v}^{-2}$. Unde capiendo fluentes erit $P = b - \frac{a\dot{z}}{\dot{v}}$. Quo pacto in hoc caſu revocatur Problema ad fluxiones primas.

Solvi etiam poteſt per quadraturam curvarum. Nam in valore ipſius P nulla involvitur variabilis niſi x. Eſt ergò $a\dot{z} = b\dot{v} - P\dot{v}$, adeoque $a^2\dot{z}^2 = \overline{b-P}|^2\,\dot{v}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \overline{\dot{z}^2 + \dot{x}^2}$, hoc eſt

$$\dot{z}\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2} = \overline{b-P} \times \dot{x}, \text{ ſeu } \dot{z} = \frac{\overline{b-P} \times \dot{x}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}:$$

Etiam $\dot{v} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$. Ergo quadrando curvas quarum

abſciſſa communis eſt $\dot{x}$, & ordinatæ ſunt $\frac{b-P}{\sqrt{a^2+2bP-P^2-b^2}}$

& $\frac{a}{\sqrt{a^2+2bP-P^2-b^2}}$, dabuntur z & v.

COROLL. III.

Si in expreſſione ordinatæ P deſit x, exiſtente $R=0$, erit $\dot{S}yy+2S\dot{y}\dot{y}-S\dot{y}\ddot{y}=0$. Qua æquatione collata cum fluxione $n:3$. *Schol. Prop.* 6. invenietur $S\frac{y^2}{\dot{y}}=\frac{a}{\dot{z}}$, hoc eſt (pro y & $\dot{y}$ ſcriptis ſuis valoribus $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ atque $\frac{\dot{x}^2\ddot{x}}{\dot{v}^3}$) $S\frac{\dot{x}^2}{\dot{v}^2}\times\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}=a$. Unde in hoc caſu erit radius curvaturæ $\left(=\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}}\right)$ æqualis $\frac{a\dot{v}^2}{S\dot{x}^2}$.

COROLL. IV.

Iiſdem poſitis, ſi præterea deſit z in expreſſione ipſius P ut ſit $\dot{P}=\dot{S}v$, erit $\frac{\dot{P}x^2}{\dot{z}\ddot{x}}=a$, hoc eſt $\dot{P}=a\dot{z}\ddot{x}\dot{x}^{-2}$. Unde regrediendo ad fluentes fit $P=b-\frac{a\dot{z}}{\dot{x}}$. Adeoque etiam in hoc caſu revocatur Problema ad fluxiones primas.

Solvi etiam poteſt per quadraturam curvarum. Nam in hoc caſu in valorem ipſius P nulla ingreditur variabilis niſi v. Ergò eſt

$a\dot{z}=$

$a\dot{z} = b\dot{x} - P\dot{x}$, adeoque $a^2\dot{z}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \dot{x}^2 = \overline{b-P}|^2 \times \overline{\dot{v}^2 - \dot{z}^2}$,

hoc est $\dot{z} = \dfrac{\overline{b-P} \times \dot{v}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$. Etiam $\dot{x} = \dfrac{a\dot{v}}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$.

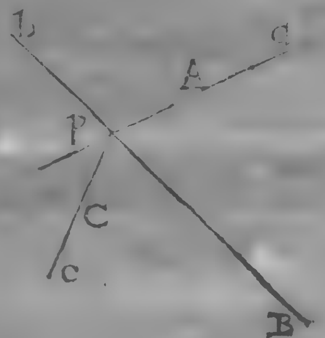
Itaque quadrando curvas, quarum abscissa communis est v, & ordinatæ sunt $\dfrac{b-P}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$, & $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2 - b^2}}$, dabuntur z & x.

COROLL. V.

Et hinc vice versa, data curva ABC, innotescit cujusmodi factum sit extremum in hac curva. Nam si quæritur ordinata bE quæ componatur ex dignitatibus ordinatæ BE, dabitur per æquationem $P = b - \dfrac{a\dot{z}}{\dot{v}}$, (*Cor.* 2.) Et si quæritur ordinata bE quæ componatur ex dignitatibus v, invenietur per æquationem $P = b - \dfrac{a\dot{z}}{\dot{x}}$ (*Cor.* 4.)

LEMMA V.

Si spatium rigidum a tribus potentiis in æquilibrio tenetur, lineæ directionum transibunt per idem punctum, & in eodem plano jacebunt.



Applicentur potentiæ ad puncta A, B, C, atque agant in directionibus Aa, Bb, Cc. Quoniam punctum quodvis

A tenetur

A tenetur in æquilibrio, vires Bb, Cc conjunctim sumptæ componunt vim vi Aa contrariam & æqualem. Sed (per Principia Statices) vires Bb, Cc hoc modo componi nequeunt, nisi transeat recta utraque Bb, Cc per punctum aliquod p in rectâ Aa, atque omnes Aa, Bb, Cc jaceant in plano communi. Ergò ita se res habet. *Q. E. D.*

LEMMA VI.

Si spatium materia gravi onustum a duobus filis sustinetur, respectu virium, quibus fila ista tenduntur, perinde est quonam modo disponatur materia in spatio isto; si modo Centrum Gravitatis semper versetur in eadem recta ad Horizontem normali.

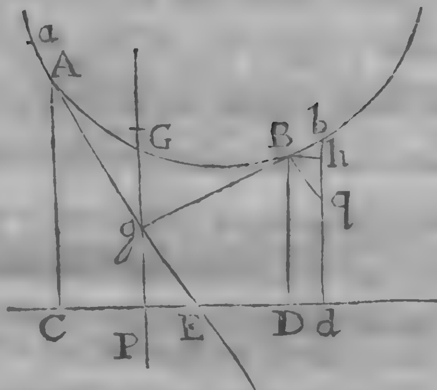
Constat ex Staticis.

N. B. In propositionibus quatuor sequentibus sumus acturi de figuris funiculorum, linteorum aquâ plenorum, atque fornicûm data onera sustinentium.[a] Omnes hæ figuræ, utpote ex materia physica compositæ, veram habent crassitiem, sunt ad flexuram nonnihil ineptæ, & cedunt aliquantulum viribus, vel extendentibns vel comprimentibus. Ergò ad hæc omnia attendere oportet eum, qui velit has figuras accuratè describere. Sed cum ea ad computum mahematicum difficile revocentur, & calculum, per se satis prolixum, nimis impedirent, nos, eorum effectus prorsùs negligentes, fingimus figuras propositas constare ex materiâ perfectè flexili extentioni, atq; contractioni prorsùs inepta, atque adeo tenui, ut ejus crassities pœnè evanescat respectu longitudinis datæ. Respectu tamen sui ipsius non semper fingimus crassitiem esse absolute nullam, quoniam in funiculis, & in fornicibus propria tantùm pondera sustinentibus, ea ad figuras formandas plurimum valet.

PROP.

PROP. XVIII. PROB. XIII.

Datâ lege crassitudinis Funiculi dependentis a duobus punctis; invenire relationes fluxionum abscissæ, ordinatæ, & curvæ; & definire conditiones quibus figura describenda subjici potest.



Sit AB funiculi pars quædam dependens a punctis A & B, atq; ad rectam positione datam CD Horizonti parallelam ducantur normales AC, BD, & ad puncta A & B ducantur tangentes Ag, Bg, quarum Ag occurrat ipsi CD in E, atque sint puncta a & b ipsis A & B proxima, & ductâ novâ ordinatâ bd, ei occurrat Bh Horizonti parallela in h, atque Bq tangenti Ag parallela in q; atque sit AC ordinata positione data, & BD ordinata mobilis; & sint CD $= z$, DB $= y$, longitudo curvæ AB $= v$, crassitudo in B $= x$, pondus funiculi AB $= p$, CE : CA : AE : : $1 : n : m$, atque a pondus datum æquale tensioni fili in A.

Quoniam pondus totius funiculi AB sustinetur a filis brevissimis aA, bB, in directionibus tangentium Ag, Bg, jacet totus funiculus in plano ad Horizontem normali; atque si partis AB centrum gravitatis sit G, per quod ducatur Horizonti normalis GP, transibit eadem GP per tangentium concursum mutuum g. Nam (per *Lemma* 5.) respectu filorum Aa, Bb perinde est, ac si omnis materia funiculi AB appendatur ad filum GP: unde spatio figuræ constituto in æquilibrio per tensiones trium filorum Aa, Bb, GP, transibunt ea

U per

per idem punctum g, atque jacebunt in eodem plano, (per *Lem.* 4.) quod ob normalem GP est Horizonti perpendicularis. Sunt ergò tensiones horum filorum, ut latera trianguli Bbq eorum directionibus parallela. Sed si fiat B$h = \dot{z}$, erit $hb = \dot{y}$, atque B$b = \dot{v}$, & (ob similia triangula Bbq, ECA,) $hq = n\dot{z}$, adeoque $bq = \dot{y} + n\dot{z}$, & B$q = m\dot{z}$. Quare est $a : p :: m\dot{z} : \dot{y} + n\dot{z}$, hoc est $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$. Est autem $\dot{p} = \dot{v}x$. Unde eliminato p ab æquatione hâc (nempe fluente uniformiter z) erit $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$. Itaque resolvendo æquationes $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$, & $v\dot{v} = y\dot{y} + z\dot{z}$, (per *Prop.* 6.) dabuntur relationes ipsorum z, y, v; nam ex hypothesi datur x, vel per dignitates unius, vel duorum, vel omnium z, y, v.

CASUS I.

Si utrumque y & v ingrediuntur valorem ipsius x, describetur curva per tres conditiones, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores y, & v, & fluxionum suarum (per *Prop.* 5.)

CASUS II.

Si desit y in valore x erunt conditiones omninò tres, quarum una ad minimum applicanda est ad valorem ipsius y, & reliquæ duæ possunt pro lubitu applicari ad valores ipsorum v & y, & fluxionum suarum.

CASUS III.

Si tantùm y ingreditur valorem ipsius x erunt etiam conditiones tres, applicandæ pro lubitu ad valores ipsorum v, y, & fluxionum suarum, modo ut una applicetur ad valorem ipsius v.

CASUS IV.

Denique si in valore ipsius x desit utrumque v & y, erunt conditiones tres, quarum una applicanda est ad valorem ipsius v, al-

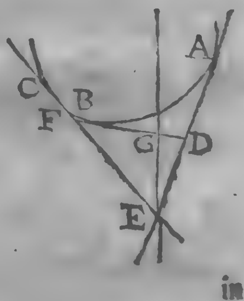
tera

tera ad valorem ipsius $\dot{y}$, & tertia pro lubitu applicari potest ad valores ipsorum v, y, & fluxionum suarum.

COROLL. I.

Per hanc solutionem, est tensio fili in B ad tensionem datam in A, ut Bb ad Bq, hoc est ut $\dot{v}$ ad $m\dot{z}$. Est ergo tensio in B ut $\frac{\dot{v}}{m\dot{z}}$, vel ob datum m, ut $\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$: Sed per æquationem $a\dot{y}+na\dot{z}-mp\dot{z}=0$, est $\dot{v}\ (=\sqrt{\dot{z}\dot{z}+\dot{y}\dot{y}}) = \frac{\dot{z}}{a} \times \sqrt{\genfrac{}{}{0pt}{}{n^2a^2}{+1} - 2mnap + m^2p^2}$; atque est tensio in A æqualis a. Tensio itaque in B est $\sqrt{\frac{n^2+1}{m^2}a^2 \frac{-2n}{m}ap + p^2}$. Et cùm hæc tensio sit proportionalis ipsi $\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$, ea erit minima quando est $\dot{v}=\dot{z}$, hoc est in curvæ puncto infimo ad quod tangens est Horizonti parallela, existente tensione istâ æquali $\frac{a}{m}$. Et hinc qualiscunque sit lex crassitudinis funiculi, datâ tensione in uno puncto A, ducendo tangentem dabitur tensio in alio quovis puncto B.

COROLL. II.



Quinetiam ducendo tangentes dividi potest funiculus in partes quarum pondera sint in datâ ratione. Sit enim ABC funiculus, & ad puncta tria A, B, C ducantur tangentes ADE, DBF, EFC sibi invicem occurrentes in D, E, & F, Tum (per hanc propositionem) centra gravitatis funiculorum AB, AC, BC, erunt in

in perpendicularibus tranſeuntibus per reſpectivos tangentium concurſus mutuos D, E, & F. Proinde ſi per duarum tangentium AD, CF concurſum E ducatur perpendicularis EG occurrens tangenti tertiæ DBF in G, erunt pondera partium AB, BC inter ſe in ratione reciprocâ diſtantiarum propriorum centrorum gravitatis a centro gravitatis totius funiculi ABC, hoc eſt pondus ipſius AB erit ad pondus ipſius BC in ratione reciprocâ DG ad GF. Datâ ergo ratione ponderum, dabitur ratio DG ad GF. Unde datis poſitione rectis DE, GE, FE, dabitur directio tangentis tertiæ DBF, per quam invenitur punctum B, quo dividitur funiculi ABC pondus in datâ ratione.

COROLL. III.

Si in expreſſione craſſitudinis x [redacted] tantùm unum ex ipſis z, y, v, ſolvetur Problema per quadraturam curvarum.

CASUS I.

Primo enim [redacted] tantùm curva v in expreſſione craſſitudinis x. Tum inito calculo per æquationes $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$, $\dot{v}\dot{v} = \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}$, & brevitatis cauſâ pro $\sqrt{n^2a^2 - 2mnap + m^2p^2 + 1}$ ſcripto R, invenietur $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$, atque $\dot{y} = \frac{mp - na}{a}\dot{z} = \frac{mp - na}{R}\dot{v}$. Unde dato p per quadraturam curvæ cujus abſciſſa eſt v, & ordinata x, deinde dabuntur z & y, quadrando curvas, quarum abſciſſa communis eſt v, & ordinatæ ſunt $\frac{a}{R}$, atq; $\frac{mp - na}{R}$.

CASUS II.

Si in expreſſione ipſius x [redacted] tantùm z, ducto utroq; membro æquationis $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$ in x, fiet $\dot{z}x = \frac{a\dot{p}}{R}$. Unde quadrando

curvas,

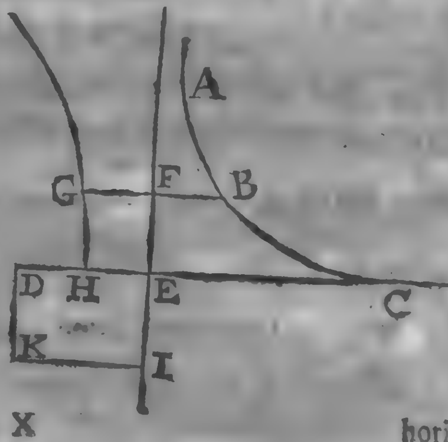
curvas, quarum abscissæ sunt z & p, & quarum ordinatæ sunt x & $\frac{a}{R}$, dabitur relatio inter z & p. Deinde ob $\dot{v} = \frac{\dot{p}}{x}$, & $\dot{y} = \frac{\overline{mp - na}}{a} \dot{z}$; quadrando curvas quarum abscissæ sunt p & z, & ordinatæ sunt $\frac{1}{x}$ & $\frac{mp - na}{a}$, dabuntur v & y.

CASUS III.

Denique si in valore x [illegible] tantùm y, ducendo æquationem $\dot{y} = \frac{\overline{mp - na}}{R} \dot{v}$ in x, fiet $\dot{y}x = \frac{\overline{mp - na}}{R} \dot{p}$ (= $\frac{\dot{R}}{\text{[illegible]}}$.) Quare faciendo $\frac{\dot{R}}{m}$ æquale areæ curvæ cujus abscissa est y, & ordinata x, dabitur relatio inter p & y. Unde deinde quadrando curvam cujus abscissa est y, & ordinata $\frac{a}{mp - na}$ dabitur z. Dabitur autem v, ut in casu secundo, quadrando curvam cujus abscissa est p, & ordinata $\frac{1}{x}$

COROLL. IV.

Per *Cas.* 3. *Cor.* 3. est $\frac{R}{m}$ æquale fluenti yx, quod idem æquale est tensioni fili, (per *Cor.* 1.) Ergo sit ABC funiculus, ad cujus punctum infimum C ducatur tangens CEHD horizonti parallela, & ad eum ducatur normalis EF; atque ducta BFG hori-



horizonti parallela, in eâ sit semper FG = x = crassitudini funiculi in B. Tum si sit GH curva, quam perpetuò tangit punctum G, atque areæ GFEH terminatæ ad tangenten CE addatur area EDKI = $\frac{a}{m}$, erit area tota IKDHGFEI semper æqualis tensioni fili in B.

Nam est EF = y, adeoque fluxio areæ est $y\dot{x}$ = fluxioni tensionis, quæ in puncto C æqualis est $\frac{a}{m}$.

COROLL. V.

Per *Ex.* 4. *Prop.* 15. est radius curvaturæ æqualis $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{y}}$; quare (per æquationem $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$.) in funiculo est radius iste æqualis $\frac{a\dot{v}^2}{mx\dot{z}^2}$; hoc est, æqualis areæ DI (fig. *Cor*. 4.) applicatæ ad FG, & deinde ductæ in $\frac{\dot{v}^2}{\dot{z}^2}$, hoc est in quadratum secantis anguli, quem facit curva cum horizonte.

COROLL. VI.

Datâ figurâ funiculi facile invenitur ratio crassitudinis suæ. Nam dantur relationes fluxionum per speciem figuræ : unde per æquationem in hoc Problemate inventam $a\ddot{y} - mx\dot{v}\dot{z} = 0$, datur crassitudo $x = \frac{a\ddot{y}}{m\dot{v}\dot{z}} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^2} \times \frac{\dot{z}\ddot{y}}{\dot{v}^3} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^2}$ applicato ad radium curvaturæ.

PROP.

PROP. XIX. PROB. XIV.

Datâ ratione crassitudinis, invenire figuram Fornicis proprium pondus sustinentis.

Sit fornicis portio quædam AB, & sint *a* & *b* puncta ipsis A & B proxima, & ducantur tangentes Ag, Bg. Tum si portionis AB centrum gravitatis sit G, per id ducta horizonti perpendicularis GP transibit per tangentium concursum g, (per *Lem.* 5. & 6.) quoniam sustinetur pondus arcus AB per lineolas *a*A, *b*B. Viribus itaque eodem modo interpretatis, atq; in Propositione præcedenti, constat figuram hujusmodi fornicis, eandem esse atq; funiculi, in situ tamen inverso.

LEMMA VII.

Sit AB linea quævis curva in plano ad horizontem perpendiculari, & per motum rectæ eidem plano normalis per curvam AB describetur superficies, per quam sustineatur fluidum cujus superficies Horizonti parallela occurrat plano eidem in rectâ CD. Tum dico,

Quod si ad Horizontem ducantur perpendiculares CA, DB, occurrentes curvæ in A & B, & rectæ CD in C & D, & ducantur Horizonti parallelæ AE, BFG, quarum BF

occurrat

occurrat rectæ CA in F, & fiat AE = CA, atque ducatur CE occurrens BF in G, erit fluidi pressio tota lateralis, per quam urget fundum AB in directione Horizonti parallela, ad pondus fluidi spatio CABD inclusi, ut area AEGF, ad aream CABD.

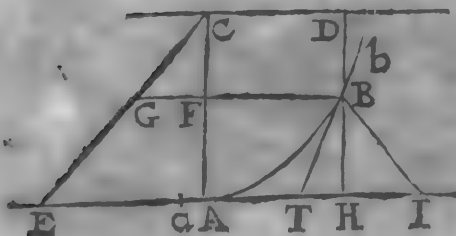
Duc *ca* horizonti perpendicularem, ipsi CA proximam, atque occurrentem curvæ AB & rectæ CD in *a* & *c*; atq; per *a* duc *ae* horizonti parallelam, occurrentem ipsis CA, CE in *f* & *e*. Tum coincidentibus punctis A & *a*, fluidi spatio CA*ac* inclusi pondere existente ut idem spatium, hoc est ut CA × *fa*, ejus pressio absoluta in lineolam A*a* perpendiculariter facta erit ut CA × A*a*; adeoque ejusdem pressionis pars lateralis horizonti parallela in directione *fa* erit ut CA × *f*A, hoc est ut EA × *f*A. Existente igitur CA*ac* fluxione ponderis, erit EA*fe* fluxio pressionis lateralis; adeoq; ubi pondus sit æquale areæ CABD, pressio lateralis fiet æqualis areæ AEGF. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.



Hinc si constituatur triangulum rectangulum PQR, cujus basis PQ horizonti parallela sit ad perpendicularem RP, ut spatium AEGF ad spatium ACDB, fluidi vis tota absoluta in fundum AB erit in directione hypothenusæ RQ, & per eam repræsentabitur, si repræsentetur pondus per perpendicularem RP.

PROP. XX. PROB. XV.



Invenire figuram Lintei aquæ pleni.

Repræsentetur Lintei portio quædam per curvam AB, &

& aquæ superficies horizonti parallela per rectam horizonti parallelam CD. Tangant linteum rectæ duæ EATHI, BT in A & B, sibi mutuo occurrentes in T, quarum AT sit horizonti parallela, & per puncta A & B ducantur ipsis CD, AT normales, iis occurrentes in C, D, & H, & in AT sit AE = AC, & ductâ CE, ei occurrat BG horizonti parallela in G, atq; ipsi CA in F.

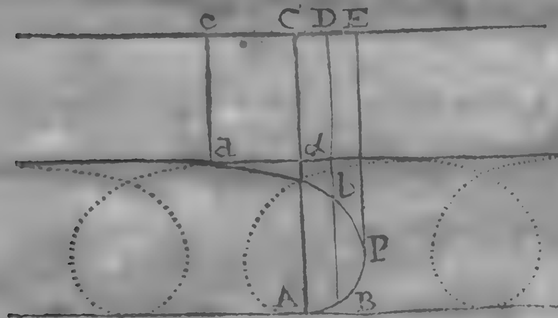
Jam si in AT sumatur HI ad HB, ut est spatium AEGF ad aream ACDB, erit hypothenusa BI parallela directioni totius vis absolutæ pressionis fluidi in fundum AB (per *Lem.* 7.) Sed huic vi resistitur per tensiones filorum A*a*, B*b*, in directionibus tangentium AT, BT: quare (per *Lem.* 5.) vis absoluta pressionis fluidi in fundum AB æquipollet vi applicatæ ad punctum T in directione rectæ BI. Tensiones ergò filorum A*a*, B*b*, & vis pressionis fluidi in fundum AB, sunt inter se ut rectæ earum directionibus parallelæ TI, TB, BI; simul existentibus pondere fluidi in spatio CABD, & pressione laterali in fundum AB ut BH & HI. Sed ob liquoris fluiditatem, liberè movebitur linteum per ejus particulas, tanquam per trochleas; adeoque est tensio fili B*b* æqualis tensioni fili A*a*, & inde TB = TI. Ergò si tensio fili data designetur per datum spatium *a*, atque pondus fluidi per spatium continens ACDB, quod etiam dicetur A, & pressio lateralis per spatium ei proportionale AEGF, quod dicetur B, erit $a : A : B :: TB : BH : HI$. Est autem $BH = \sqrt{2TB \times HI - HIq}$; (ob TI=TB) quare etiam per hanc analogiam erit $A = \sqrt{2aB - BB}$.

Sit jam $CA = c$, $AH = z$, $DB = y$ ($= CF = FG$.) Tum erit $B = \frac{c^2 - y^2}{2}$, atque $TH : HB :: \dot{z} : \dot{y}$, hoc est, (per analogiam supra inventam, & per valorem ipsius A) $a - B : \sqrt{2aB - BB} :: \dot{z} : \dot{y}$: Unde fit $\dot{z} = \frac{\overline{B - a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$ quippe ratione habitâ signorum ipsorum $\dot{z}$ & $\dot{y}$. Nam ubi curva est versus terram convexa, cre-

ſcente z, decreſcit y, atque eſt $B = \frac{cc - y^2}{2}$: Sed ubi curva eſt ad terram concava, ipſorum z & y fluxiones ſunt ejuſdem ſigni, exiſtente etiam $B = \frac{yy - cc}{2}$. Ipſius autem z fluxio eſt ejuſdem formæ in utroque caſu, ſigno tantùm mutato. In caſu figuræ præſentis fluidum verè continetur in linteo: in caſu altero jacet ad lintei partes inferiores, idque (puta mediante ſyphone) ſurſum urget cum vi in quovis puncto proportionali fluidi altitudini perpendiculari infra altiſſimam ſuperficiem horizontalem.

Datur autem z ex dato y, quadrando curvam cujus abſciſſa eſt y, atq; ordinata $\frac{B - a}{\sqrt{2aB - BB}}$. Et per coefficientem indeterminatum in valore fluentis z, & per coefficientes duos a & c accommodari poteſt ſolutio ad tres conditiones, quarum ad minimum una reſpectum habebit ad valorem ipſius z; per quem nempe determinatur poſitio curvæ.

Per æquationem $\dot{z} = \frac{\overline{B - a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$ $(= \frac{B - a}{A}\dot{y},)$ eſt $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = 0$;



hoc eſt, ordinata y tangit curvam, quando eſt $B = a$, i. e. $\frac{cc - yy}{2} = a$,

vel

vel $y = \sqrt{cc - 2a}$. Et in hoc caſu eſt area $A = a$. Item ubi $A = 0$, erit $\dot{z}$ infinita reſpectu $\dot{y}$, hoc eſt curva tanget rectam horizonti parallelam. Et hoc fit ubi eſt $2aB - BB = 0$, id eſt, vel quando $B = 0$, adeoque $y = c$, vel quando $B = 2a$, adeoq; $y = \sqrt{cc - 4a}$. Ergò ſi ſit CD fluidi ſuperficies horizontalis, atque ad horizontem ducatur normalis CA, & in eâ ſumantur $CA = c$, & $C\alpha = \sqrt{cc - 4a}$, & per puncta A & α ducantur AI & $\alpha\alpha$ horizonti parallelæ, curva deſcripta utraſque tanget, & inter eas tota jacebit. Idque fiet ſub hâc conditione, ut ordinata DB primùm pergendo de CA per DB perveniat in EP, ubi ſit $EP = \sqrt{cc - 2a}$, atque area $CABPE = a$; deinde regrediendo de EP per Db perveniat in ca, ubi ſit $ca = \sqrt{cc - 4a}$, atque area $EPbac = a$. Nam progrediente ordinatâ area increſcit, & regrediente ordinatâ decreſcit: quare ſi area ſit nihil, hoc eſt indicium, vel ordinatam de loco ſuo nondum moviſſe, vel quod areæ decrementum per regreſſionem ordinatæ æquale ſit ejuſdem incremento prius facto per progreſſionem ordinatæ. Et hinc per infinitas repetitiones figuræ $APBba$ utrinque factas curva ſerpet perpetuò inter horizonti parallelas AI, αa ad inſtar cycloidis, ubi punctum deſcribens ſumitur ultra peripheriam rotæ.

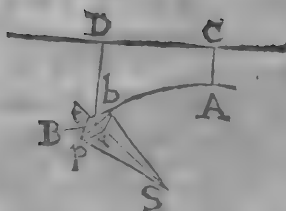
In hâc curvâ eſt radius curvaturæ æqualis ipſi $\frac{a}{y}$. Quod mox demonſtrabimus in propoſitione ſequenti.

PROP. XXI. PROB. XVI.

Invenire figuram Fornicis ſuſtinentis onus fluidi ſuperincumbentis.

In hâc figurâ vires omninò interpretantur ut in *Prop.* 20. Quare eſt hujus fornicis figura eadem, atque figura lintei, onere tantùm ad contrarias partes figurarum applicato; in hâc enim applicatur fluidum ad curvæ partes convexas, in illâ ad partes concavas.

Sed



Sed ut per varias ſolutiones res quodammodo fiat illuſtrior, repræſentetur fornicis portio quædam per curvam AB; vertice ſummo ubi tangens eſt horizonti parallela, exiſtente A. Repræſentetur etiam fluidi ſuperficies ſumma per rectam horizonti parallelam CD, & ductis horizonti normalibus AC, BD, ſint AC $= c$, CD $= z$, DB $= y$, atque curva AB $= v$, & pro area CABD ſcribatur A. Sume puncta b & p utrinque ad diſtantias æquales minimas a puncto B, & ducatur ad curvam normales bS, pS concurrentes in S, atque ducantur tangentes bt, pt concurrentes in t, & compleatur parallelogrammum $btpr$.

Conſtat puncta b & p verſus invicem urgeri per vires duas in directionibus tangentium bt & pt; his autem viribus reſiſti per pondus fluidi inſiſtentis fundo bp, idque in directione ad fundum perpendiculari. Sunt ergo vires illæ ut latera trianguli btr earum directionibus parallela, vel ut latera trianguli conſimilis Sbp. Sed punctum b ſuſtinet pondus totius fluidi in areâ CABD, cujus preſſio in directione bt eſt ad ejuſdem preſſionem perpendicularem ut ſecans anguli bBD ad radium, hoc eſt ut $\dot v$ ad $\dot y$: item preſſio in fundum bp eſt ad pondus fluidi in ſpatio ACDB ut $bp \times y$ ad A. Quare conjunctis his rationibus fit $bp \times y\dot y$ ad $A\dot v$ ut bp ad bS; adeoq; bS $= \frac{A\dot v}{y\dot y}$. Sed datâ $\dot v$ eſt bS $= \frac{\dot v \dot z}{\ddot y}$ (per *Ex.* 4. *Prop.* 15) Unde fit $\frac{\dot v \dot z}{\ddot y} = \frac{A\dot v}{y\dot y}$, hoc eſt $\dot z y\dot y = A\ddot y$, vel $\dot A\dot y - A\ddot y = 0$. Unde capiendo fluentes fit $\frac{A}{\dot y} = \frac{a}{\dot v}$, hoc eſt $A\dot v = a\dot y$. Eſt autem $\dot v\dot v =$

$\dot z\dot z +$

$\dot{z}z + \dot{y}y$, unde fit $\dot{y} = \frac{A\dot{z}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$; hoc est $\dot{y}y = \frac{A\dot{A}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$; Unde (capiendo fluentes, & addendo $a + \frac{cc}{2}$, ut fiat $y = c$ in vertice curvæ, ubi est $A = o$,) fit $\frac{y^2}{2} = a + \frac{c^2}{2} - \sqrt{a^2 - A^2}$. Pro $\frac{y^2 - c^2}{2}$ scribe B, atque calculo peracto invenietur $A = \sqrt{2aB - B^2}$; adeoque $\dot{z} = \frac{\overline{a - B} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$, omninò ut in *Prop.* 20.

COROLLARIUM.

In hâc solutione inveniebatur $\frac{A}{\dot{y}} = \frac{a}{\dot{v}}$, atque erat $bS = \frac{A\dot{v}}{y\dot{y}}$. Est ergò pressio $\frac{A\dot{v}}{\dot{y}}$ facta in lineolam bB æqualis datæ a, atque radius curvaturæ $bS = \frac{a}{y}$.

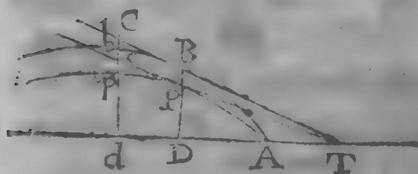
SCHOLIUM.

Ex hâc expressione radii curvaturæ constat eandem hanc curvam etiam esse figuram laminæ elasticæ datâ vi flexæ. Nam est flexura in ratione reciprocâ radii curvaturæ, adeoque in hac curva in directa ratione altitudinis y. Sed dati ponderis vis ad laminam incurvandam est ut ejusdem distantia minima a puncto flexuræ. Quare si pondus applicetur ad laminam in recta CD, figura genita ea erit quam hic descripsimus.

Quinetiam manentibus punctis, in quibus hæc curva occurrit fluidi superficiei horizontali CD, si minuatur altitudo maxima c in infinitum.

infinitum, erit hæc eadem curva cujus figuram induit Nervus musicus vibrans, in quovis articulo motûs sui. Quod jam demonstrare properamus.

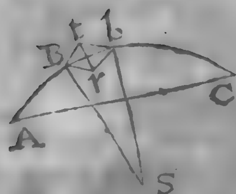
LEMMA VIII.



Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem habentium AD, ordinatæ DB, DP sint ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum, ut curvæ tandem coincidant cum axe AD, erit ultima ratio flexuræ eadem, quæ ordinatarum.

Duc novam ordinatam *dp* curvis occurrentem in *p* & *b*, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes *dp* in C & *c*. Tum ob datam rationem ordinatarum, tangentes productæ concurrent in aliquo puncto T in axe AD. Unde ob parallelas *db*, DB, erit *d*C : *dc* : : DB : DP : : *db* : *dp* : : *d*C — *db* : *dc* — *dp*, hoc est *b*C : *pc* : : DB : DP. Coincidant jam ordinatæ *db*, DB, atque lineolæ evanescentes *b*C, *pc* erunt subtensæ angulorum contactus *b*BC, *p*P*c*; atque imminutis ordinatis in infinitum erunt angulis ipsis proportionales. Sed per hos angulos æstimatur flexura. Quare coincidentibus curvis AB, AP cum axe AD, erit flexura in B ad flexuram in P ut ordinata DB ad ordinatam DP. *Q. E. D.*

LEMMA IX.



Datâ crassitudine nervi tensi, vis acceleratrix cujusvis puncti est ut flexura in isto puncto.

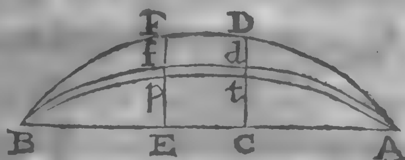
Sit nervus in positione curvæ ABC. Sume punctum *b* puncto B proximum, & duc tangentes B*t*, *bt* concurrentes

tes in t, & compleatur parallelogrammum Bt b r, atque ad curvam ducantur normales BS, bS concurrentes in S. Tum (per principia Statices) erit vis absoluta ad movendam particulam Bb in directione tr ad fili tensionem in B, vel in b, per quam generatur vis illa, ut tr ad tB, hoc est ut B b ad BS, adeoque vis illa est ut $\frac{Bb}{BS}$; quoniam fili tensio est data. Sed est vis acceleratrix in ratione vis absolutæ directè & materiæ movendæ inversè; & in hoc casu est materia movenda ut Bb. Quare est vis acceleratrix ut $\frac{1}{BS}$, hoc est ut curvatura in B; curvatura enim est in ratione reciprocâ radii.

PROP. XXII. PROB. XVII.

Definire motum Nervi tensi.

In his pono nervum constare ex materiâ tenuissimâ uniformiter crassâ, ejusq; elongâtionem maximam ab axe motus AB esse infinitè parvam; ita ut vis tensionis non mutetur per auctam longitudinem nervi in majoribus suis distantiis ab axe AB, & ut inclinatio radiorum curvaturæ ad axem sit semper insensibilis.



SOLUTIO.

Per puncta A & B describetur curva ADFB, cujus indoles sit, ut, ductis ad libitum ordinatis ad axem normalibus CD, EF, sit curvatura in D ad curvaturam in F, ut DC ad FE. Dico quod hæc sit figura, quam induit nervus in quovis articulo motus sui; item quod puncta omnia D, F simul ad axem pervenientia & simul redeuntia vibrationes suas omnes peragent in eodem tempore periodico, ad instar penduli oscillantis in Cycloide. *Q. E. F.*

D E:

DEMONSTRATIO.

Sit enim curva ADFB nervi distantia maxima ab axe AB, punctis omnibus jam quiescentibus. Tum quoniam curvatura in D est ad curvaturam in F ut distantia CD ad distantiam EF (ex hypothesi) erit acceleratio in D ad accelerationem in F in eadem ratione distantiarum (per *Lem*. 9.) adeoq; in initio motus spatia simul percursi D*d*, F*f* erunt in eadem ratione: adeoq; & divisim spatia percurrenda C*d*, E*f* erunt in eadem ratione: unde etiam accelerationes novæ in punctis *d*, & *f* erunt in eadem ratione (per *Lem*. 8, & 9.) atq; erunt ad accelerationes priores in D & F, ut distantiæ *d*C & *f*E ad distantias DC & FE (per eadem *Lemm.*) Ergò puncti cujusvis D, vel ut in eadem curva ADFB, vel ut in diversis ADFB & A*df*B spectati, acceleratio semper est ut ejusdem distantia ab axe motus AB. Quare (per *Prop.* 51. *Lib*. 1. *Phil. Nat. Princ. Math*.) puncta omnia Nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt, & vibrationes singulas peragunt in dato tempore periodico, ad instar corporis in Cycloide oscillantis. *Q. E. D.*

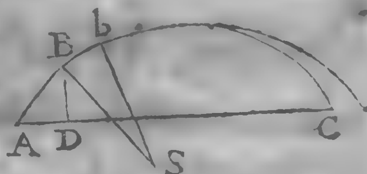
Porrò si Nervus plectro modò percussus nondum induerit formam curvæ jam descriptæ; sit ejus forma ADFB, curvatura in F existente ad curvaturam in D in majori ratione quam distantiæ FE ad distantiam DC. In hoc casu velocitas in F est ad velocitatem in D, vel in majori, vel in minori ratione, quam distantia FE ad distantiam DC. Si sit velocitas in F ad velocitatem in D in ratione majore quam FE ad DC, erit spatium F*f* in tempore minimo descriptum ad spatium D*d* eodem tempore descriptum in ratione majore quam EF ad CD; adeoque divisim erit *f*E minor respectu FE, quam est *d*C respectu DC, indeque (per *Lemm.* præd.) acceleratio in *f* minor erit respectu accelerationis in F, quam est acceleratio in *d* respectu accelerationis in D. Itaque majoris velocitatis acceleratione semper decrescente, & minoris velocitatis acceleratione è contra semper crescente (respectu distantiarum ab axe AB,) motus inter se tandem ita temperabuntur, ut perventis punctis F & D in puncta quædam *p* & *t*, erunt tum velocitates tum accelerationes ut distantiæ *p*E, *t*C; adeoque curva A*tp*B jam existente eadem quam descripsimus, motus

dehinc

dehinc omnes conſpirent. Atque idem eveniet ſi ſit velocitas in F ad velocitatem in D in minore ratione quam diſtantiæ FE ad diſtantiam DC. Quare quocunque modo percutiatur nervus, quam citiſſime induet formam curvæ hic deſcriptæ, atque perget moveri more jam deſcripto. *Q. E. D.*

PROP. XXIII. PROB. XVIII.

Datis longitudine Nervi, ejuſdem pondere, & pondere tendente, invenire tempus periodicum.

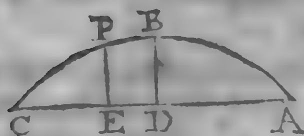


Sit Nervi inter puncta A & C extenſi longitudo L, ejuſdem pondus N, atq; pondus tendens P, & conſtituatur nervus in poſitione ABC; & ſumptis punctis B & *b* proximis, ducantur ad curvam normales BS, *b*S, concurrentes in S; & ducatur ordinata axi normalis BD.

Per *Lem.* 9. eſt vis tenſionis Nervi ad vim abſolutam ad movendam particulam B*b* ut BS ad B*b*. Sed eſt vis acceleratrix in ratione compoſitâ vis abſolutæ directe & materiæ movendæ inverſe. Quare ſi particulæ movendæ B*b* pondus dicatur *p*, erit acceleratio particulæ B*b* ad accelerationem ponderis P ab ipſius propriâ gravitate oriundam, hoc eſt, vis acceleratrix nervi ad movendum punctum B ad vim acceleratricem gravitatis, ut $\frac{Bb}{p}$ ad $\frac{BS}{P}$; unde ſi gravitatis acceleratio data dicatur 1, erit puncti B acceleratio $\frac{Bb \times P}{BS \times p}$. Sed eſt P ad *p* in ratione compoſitâ P ad N, & N ad *p*, ſeu L ad B*b*, unde fit $\frac{P}{p} = \frac{P \times L}{N \times Bb}$. Adeoq; acceleratio puncti B eſt $\frac{P \times L}{N \times BS}$. Sed

 quoniam

quoniam eſt curvatura ut diſtantia BD (per *Prop.* 22.) quæ eadem eſt ut $\frac{1}{BS}$, erit $BS \times BD$ quantitas data. Sit illa a. Tum pro BS ſubſtituto $\frac{a}{BD}$, fiet acceleratio puncti B æqualis $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$. Sed in funipendulis tempora periodica ſunt in dimidiatâ ratione longitudinum directe, & virium acceleratricium inverſè (per *Prop.* 52. *Lib.* 1. *Princip. Math.*) Quare ſi conſtituatur pendulum cujuſvis longitudinis D, erit tempus periodicum nervi ad tempus periodicum iſtius penduli in dimidiatâ ratione (BD applicatæ ad $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$, hoc eſt) $\frac{N \times a}{P \times L}$ ad D. Atque numerus vibrationum nervi in tempore unius vibrationis penduli erit $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}$.



Supereſt ut inveniamus quantitatem a. Conſtituatur itaque nervus in poſitione ABPC, & ad axis AC punctum medium D erigatur ordinata normalis DB, & ſit alia quævis ordinata EP, atq; ſint $DB = c$, $DE = z$, $EP = y$. Tum, ob radium curvaturæ æqualem $\frac{a}{y}$, erit (per *Prop.* 21.) $\dot{z} = \frac{\overline{B - a} \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$, nempe pro B ſumpto $\frac{cc - yy}{2}$. Sed evaneſcentibus c & y hæc expreſſio fit $\dot{z} = \frac{-a\dot{y}}{\sqrt{ac^2 - ay^2}} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}}$, vel $\dot{z} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{c} \times \frac{c\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}}$. At enim eſt $\frac{c\dot{y}}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ fluxio arcus circularis, cujus ſinus eſt y, & radius c. Quare arcu quadrantali

drantali in isto circulo existente q, erit DC $= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{c} \times q = \frac{1}{2}$L. Unde est $a^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2}$L ut radius circuli ad arcum quadrantalem, vel $a^{\frac{1}{2}}$ ad L ut diameter circuli ad peripheriam ejusdem. Sit ergò p peripheria circuli cujus diameter est 1, atque jam existente $a^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{p}$. erit numerus vibrationum Nervi, in tempore unius vibrationis penduli datæ longitudinis D, æqualis $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} p}{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}$. *Q. E. I.*

COROLL. I.

Comparatis motibus Nervorum inter se, ob data p & D, erit tempus periodicum Nervi ut $\frac{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}}$.

COROLL. II.

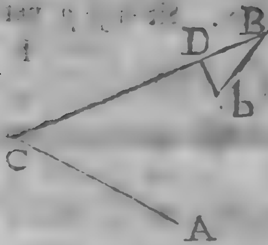
Ubi Nervi constituuntur ex eodem filo, est Nervi pondus N ut ejusdem longitudo L. Quare in comparandis motibus hujusmodi Nervorum, est Tempus periodicum ut $\frac{L}{P^{\frac{1}{2}}}$.

COROLL. III.

Iisdem positis, si prætereа detur pondus P, hoc est, si longitudines sumantur in eodem Nervo diversimode obturato, erit Tempus periodicum ut L. Sed respectu Nervi aperti, pars dimidia edit sonum Diapason, pars $\frac{2}{3}$ edit sonum Diapente, pars $\frac{3}{4}$ edit sonum Diatessaron, & sic de cæteris. Quare a Musicis recte definiuntur proportiones hujusmodi tonorum per numeros, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. longitudinibus Nervorum proportionales.

LEM-

LEMMA X.



Si in punctum datum ſpatii rigidi circa datum axem mobilis, impingat data particula in datâ directione, data cum velocitate; atq; in figura præſenti ſint puncta C, B, b, A interſectiones plani ad axem datum rotationis perpendicularis, cum ipſo axe & cum rectis ei parallelis, tranſeuntibus per locum puncti in quod impingit particula data, per extremitatem rectæ in directione motus, & proportionalis velocitati iſtius particulæ impingentis; & per ſpatii ejuſdem aliud punctum datum: atq; ad CB ducatur normalis bD: tum erit motus iſtius ſpatii productus per impulſum iſtius particulæ omninò idem, ac ſi produceretur per aliam particulam, cujus magnitudo eſt ad magnitudinem particulæ prioris, ut CB^2 ad CA^2, & velocitas eſt ut $Db \times \frac{CA}{CB}$, impingentem in iſtud aliud punctum datum cujus projectio eſt A, cum directione tum rectæ CA tum Axi rotationis perpendiculari.

Nam per rigorem ſpatii omnis motus tollitur, niſi quatenus fit in planis ad axem normalibus. Quare punctis omnibus de quo agitur modo prædicto ad tale planum reductis, particulæ impingentis velocitas & ejuſdem directio in hoc plano repræſentabitur per rectam Bb. Sed hujus velocitatis pars BD tollitur per reſiſtentiam puncti C, & per partem reliquam Db producitur motus ſpatii. Velocitas autem puncti A eſt ad velocitatem puncti B, ut diſtantia a centro CA ad diſtantiam CB: quare puncti A velocitas producta per motum particulæ impingentis in B erit $Db \times \frac{CA}{CB}$. Sed & momentum

ejuſdem

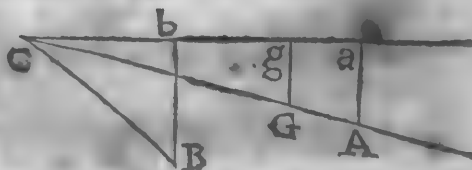
ejuſdem particulæ eſt ad momentum quod tribuit puncto A, ut CA ad CB: quare ſi particulæ iſtius magnitudo ſit p, ejus momento in B exiſtente $p \times Db$, momentum ab eâ tributum puncto A erit $p \times Db \times \frac{CB}{CA}$. Sed eadem velocitas & idem momentum producuntur in puncto A per vim particulæ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingentis in illud punctum, in directione ipſi CA perpendiculari cum velocitate $Db \times \frac{CA}{CB}$. Quare reſpectu motus producti in ſpatio rigido, perinde omninò eſt ſive particula p impingat in B, ſive particula $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingat in A modo jam definito. *Q. E. D.*

PROP. XXIV. PROB. XIX.

Corporis dati e dato Axe Horizonti parallelo dependentis invenire Centrum Oſcillationis.

Per Centrum Oſcillationis intelligo punctum, cujus velocitas idem ſemper eſt ac ſi corpore reliquo amoto illud ſolum circa eundem axem oſcilletur.

Sit ergò præſens figura in plano ad horizontem & ad Axem oſcillationis perpendiculari, tranſeunte per corporis centrum gravitatis G,

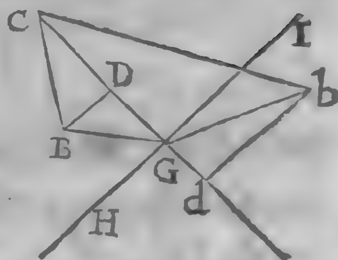


atque ſit C interſectio hujus plani cum Axe oſcillationis. Duc Horizonti parallelam Cg, atque in rectâ CG ſit A Centrum oſcillationis quæſitum. Sit p particula priſmatica Axi motus parallela, & plano figuræ inſiſtens in puncto B. Duc CB, & ad rectam Cg duc perpendiculares Bb, Gg, Aa, ei occurrentes in b, g, a.

 Si

Si gravitatis acceleratio data sit 1, tum particulæ p acceleratio, ad spatium figuræ movendum circa punctum C, erit $\frac{Cb}{CB}$. Quare puncti A momentum a vi particulæ p oriundum erit ($p \times \frac{Cb}{CB} \times \frac{CB}{CA} =$) $p \times \frac{Cb}{CA}$. Sed (per *Lem.* 10.) motus puncti A per particulam p in puncto B productus perinde omninò est, ac si produceretur a particulâ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingente in ipsum punctum A. Quare vice particularum p in locis B, substitutis novis particulis $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ in puncto A, dabitur acceleratio puncti A, oriunda ex conjunctis viribus totius Corporis dati, per notissimam regulam Collisionum; nempe applicando summam omnium momentorum $p \times \frac{Cb}{CA}$ ad summam omnium particularum substitutarum $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$, hoc est (ob datum CA) applicando summam omnium $p \times Cb \times CA$ ad summam omnium $p \times CB^2$: Sed ex notissimâ proprietate centri gravitatis, si magnitudo corporis totius dati sit P, erit summa omnium $p \times Cb$ æqualis $P \times Cg$. Quare si pro summâ omnium $p \times CB^2$ scribatur Q, erit acceleratio puncti A æqualis $\frac{P \times Cg \times CA}{Q}$. Sed, ex hypothesi, est hæc acceleratio æqualis ipsius puncti A accelerationi propriæ $\frac{Ca}{CA}$ vel $\frac{Cg}{CG}$. Est ergò $CA = \frac{Q}{P \times CG}$. Inventâ itaque summâ omnium particularum corporis propositi ductarum in quadrata suarum distantiarum minimarum ab Axe oscillationis, per Fluxionum Methodum inversam, dabitur distantia centri oscillationis ab Axe, applicando hanc summam ad productum corporis dati ducti in distantiam centri gravitatis ab Axe oscillationis. *Q. E. I.*

COROLL. I.



In eodem plano exiſtentibus punctis C, G, B iiſdem ac ſupra, ad CG duc normales HGI, BD. Tum erit $CB^2 = BG^2 + CG^2 - 2CG \times GD$; nempe cadente puncto B ad eaſdem partes rectæ HI atque punctum C. Sed ubi cadit punctum *b* ad contrarias partes rectæ HI, erit $CB^2 = bG^2 + CG^2 + 2CG \times Gd$. Eſt ergò ſumma omnium particularum ductarum in propria ſua CB^2 per totam figuram, æqualis ſummæ omnium particularum ductarum in propria $\overline{BG^2 + CG^2}$ per totam figuram, minus ſummâ omnium $p \times 2CG \times GD$ ex unâ parte rectæ HI, plus ſummâ omnium $p \times 2CG \times Gd$ ex alterâ parte HI. Sed ex naturâ centri gravitatis eſt ſumma omnium $p \times 2CG \times Gd$ æqualis ſummæ omnium $p \times 2CG \times GD$. Quare eſt ſumma omnium $p \times CB^2$, ſeu Q, æqualis ſummæ omnium $p \times GB^2 + p \times CG^2$, hoc eſt, (ob datum CG^2) æqualis $P \times CG^2$ plus ſumma omnium $p \times GB^2$. Si ergò pro ſumma omnium $p \times GB^2$ ſcribatur D, erit $Q = P \times CG^2 + D$; adeoq; $CA \left(= \frac{Q}{P \times CG}\right) = CG + \frac{D}{P \times CG}$.

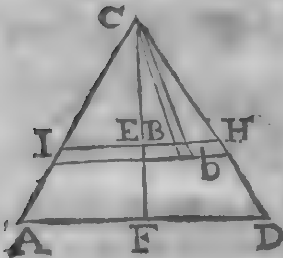
COROLL. II.

Hinc eſt $GA = \frac{D}{P \times CG}$. Unde data directione Axis Oſcillationis reſpectu figuræ corporis propoſiti, dabitur productum $CG \times GA$ $\left(= \frac{D}{P}.\right)$ Adeoque dato centro oſcillationis in uno caſu ejuſdem directionis Axis, dabitur idem in omnibus aliis, abſque ulteriori calculo.

In

In casu aliquo proposito calculus institui potest, vel per inventionem ipsius Q ex commoda assumptione puncti C, vel per inventionem ipsius D, prout commodius videbitur.

EXEMP. I.



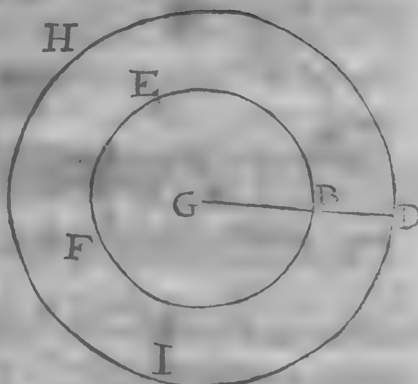
Inveniendum sit centrum oscillationis Coni recti geniti per rotationem trianguli Isoscelis ACD circa perpendiculum CF, & dependentis ab ipsius vertice C. Duc basi parallelam IEH occurrentem ipsis CA, CF, CD, in I, E, H; & sint CF $= a$, FD $= c$, CE $= z$, adeoq; EH $= \frac{cz}{a}$, & in recta EH sumpto quovis puncto B, sit EB $= x$. Tum si particulæ prismaticæ p puncto B insistentis basis sit $\dot{z}\dot{x}$ (= parallelogrammo Bb) ejusdem altitudine existente $2\sqrt{EHq - xx}$, erit particula ipsa $\dot{\dot{p}} = 2\dot{z}\dot{x}\sqrt{EH^2 - xx}$, atq; $\dot{\dot{p}} \times CB^2 = 2CE^2 \times \dot{z}\dot{x}\sqrt{EH^2 - xx} + 2xx\dot{z}\dot{x} \times \sqrt{EH^2 - xx}$. Et hæc est fluxio summæ omnium $\dot{p} \times CB^2$ in recta IH. Sed si pro Area circuli cujus diameter est IH scribatur A, erit hujus fluens totalis adjacens rectæ IH æqualis $\frac{4aa + cc}{4aa}\dot{z}z^2A$ (per *Quad. Curvarum*: nam in hoc casu sumuntur CE, EH, & $\dot{z}$ pro datis, & est CE : EH :: $a : c$.) Et hujus fluens totalis est summa omnium $p \times CB^2$ in tota figura. Sed est area A ut z^2. Sit ergò A $= nz^2$, & sumendo fluentem fiet Q $= \frac{4a^2 + c^2}{20}n^3a^3$. Distantia autem centri gravitatis a vertice C est $\frac{3}{4}a$ [= CG], atque magnitudo Coni est $\frac{na^3}{3}$ [= P]; unde fit CG x P $= \frac{na^4}{4}$, adeoq; distantia centri Oscillationis a puncto suspensionis C est $\frac{4a^2 + c^2}{5a}$ [= CA = CG +

D

$+ \frac{D}{CG \times P} = \frac{3}{4}a + \frac{4D}{3aP}$.] Unde etiam fit $\frac{D}{P} = \frac{3a^2 + 12c^2}{80}$ $(= \frac{3CF^2 + 3AD^2}{80}.)$

EXEMP. II.

Sit figura proposita Sphæra. In hâc figurâ calculus commodissimè procedit per inventionem ipsius D, seu summæ omnium $p \times GB^2$. Sit ergò G centrum Sphæræ, DHI circulus maximus, & sit Sphæræ radius $GD = a$. Centro G & radio quovis GB describe circulum BEF, & sit $GB = z$, & circumferentia $BEF = nz$. Tum summa omnium $p \times GB^2$ in circumferentia BEF erit æqualis eidem circumferentiæ ductæ in altitudinem particulæ in B ductæ in GB^2, hoc est $2nz^3\sqrt{a^2 - z^2}$. Est ergò summa omnium $p \times GB^2$ in tota Sphæra æqualis fluenti ipsius $2n\dot{z}z^3\sqrt{a^2 - z^2}$. hoc est, $\frac{4}{15}na^5$ [= D]. Sed est ipsa Sphæra æqualis $\frac{2}{3}na^3$ [= P]; Unde fit $\frac{D}{P} = \frac{2}{5}a^2$.



SCHOLIUM.

Per argumentationem in hac Propositione, corporis oscillantis motus, tam respectu virium, quam respectu velocitatis, idem est, ac foret motus particulæ æqualis summæ omnium $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ (hoc est particulæ $\frac{CG^2 \times P^2}{Q}$,) oscillantis ad distantiam CA. Adeoq; vice corporis cujusvis oscillantis substitui potest hujusmodi particula sita in ejusdem centro Oscillationis. Ubi ergo quæritur corporum plurium

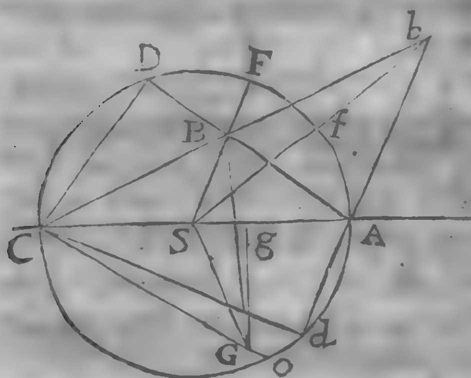
 centrum

centrum Oscillationis commune, convenit singulorum centra Oscillationis seorsim quærere, & in iis substituere hujusmodi particulas vice corporum ipsorum, atque deinde quærere centrum commune oscillationis per principia hujus calculi.

PROP. XXV. PROB. XX.

Corporis cujusvis circa datum Axem revolventis invenire Centrum Percussionis in recta data.

Est Centrum Percussionis punctum in corpore circa axem mobilem, sed immotum, revolvente, quo in obstaculum impingente sistitur motus totus corporis revolventis, ita ut nec huc neq; illuc inclinet.



Constat hujusmodi puncti locum esse in plano motûs centri gravitatis; nam elementi cujusvis prismatici huic plano normalis, adeoq; axi revolutionis paralleli, motus, cum sit sibi semper parallelus, momenta ex utraq; parte hujus plani erunt æqualia; adeoque per resistentiam in eo factam sisti potest motus totus corporis revolventis.

Sit ergò C intersectio axis revolutionis cum plano motus centri gravitatis G, & quæratur centrum percussionis in recta CS transeunte per punctum C, & sit punctum illud quæsitum A. Diametro CA describe circulum CDA *d*, cujus centrum sit S; & sumptis punctis duobus, B intra circuli peripheriam, & *b* extra eandem, iis insistant particulæ duæ prismaticæ *p* axi revolutionis parallelæ. Duc AB, SB, A*b*, S*b*, circulo occurrentes in D, F, *d*, *f*, & duc CB, C*b*, CD, C*d*.

Ob

Ob motum revolutionis, punctorum velocitates absolutæ, in directionibus ipsis CB, Cb normalibus, sunt ut distantiæ CB, Cb. Quare impingente corpore in punctum A, particularum velocitates ad trahendum spatium circum A in partes contrarias per radios AB, Ab erunt ut rectæ BD, bd. Vires ergo absolutæ particularum in extremitatibus radiorum AB, Ab, sunt ut $p \times DB$, & $p \times db$; & harum virium efficaciæ ad corpus trahendum in partes contrarias circum A, sunt ut $p \times DB \times BA$, & $p \times db \times bA$. Ergo per conditiones Problematis, debet summa omnium $p \times DB \times BA$ intra circulum æquari summæ omnium $p \times db \times bA$ extra circulum.

Sed ex naturâ circuli est $DB \times BA = SF^2 - SB^2 = SA^2 - SB^2$, atque $db \times bA = Sb^2 - SA^2$. Unde est summa omnium $p \times SA^2 - p \times SB^2$ intra circulum æqualis summæ omnium $p \times Sb^2 - p \times SA^2$ extra circulum. Quare transferendo omnes terminos $p \times SA^2$ ad unam partem æquationis, & terminos $p \times SB^2$, $p \times Sb^2$, ad alteram partem, erit summa omnium $p \times SA^2$, tam intra quam extra circulum in universo corpore, æqualis summæ omnium $p \times SB^2$, etiam in universo corpore. Sed ductis SG & GB, & pro Corporis magnitudine scripto P, erit summa omnium $p \times SB^2$ æqualis $P \times SG^2$ plus summâ omnium $p \times GB^2$ (per *Cor.* 1. *Prop.* 24.) Item ob datum SA^2, est summa omnium $p \times SA^2 = P \times SA^2$. Proinde pro datâ summâ omnium $p \times GB^2$ scripto D, erit $P \times SA^2 = P \times SG^2 + D$, hoc est $SA^2 - SG^2 = \frac{D}{P}$.

Ad CA duc normalem Gg, & duc CG; atque erit $SG^2 = CG^2 - CA \times Cg + SA^2$, adeoq; $SA^2 - SG^2 = CA \times Cg - CG^2$, hoc est $CA \times Cg - CG^2 = \frac{D}{P}$, seu $CA = \frac{CG^2}{Cg} + \frac{D}{P \times Cg}$. Dantur autem omnes CG, Cg, P & D; quare etiam datur punctum A. *Q. E. I.*

C O-

COROLLARIUM.

Hinc eſt CA ad $CG + \frac{D}{P \times \overline{CG}}$ ut CG ad Cg. Quare ſi recta CG occurrat circulo in O, exiſtente angulo ad O recto, adeoque & triangulis CAO, CGg ſimilibus, erit $CO = CG + \frac{D}{P \times \overline{CG}}$. Unde (per *Cor.* 1. *Prop.*24.) eſt O centrum Oſcillationis. Proinde per centrum rotationis C ductâ rectâ ad centrum Oſcillationis O, ei perpendicularis OA erit locus centri Percuſſionis. Invenitur itaq; centrum Percuſſionis per calculum centri Oſcillationis.

LEMMA XI.

In Curva Logarithmica ſubtangens datur. Et ſi ſit numerus y, Logarithmus z & Subtangens illa c, erit $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{c}$.

Hoc ab aliis paſſim demonſtratur.

HYPOTHESIS I.

Denſitas Aeris eſt oneri impoſito proportionalis.

Hoc Experimentis confirmatur.

HYPOTHESIS II.

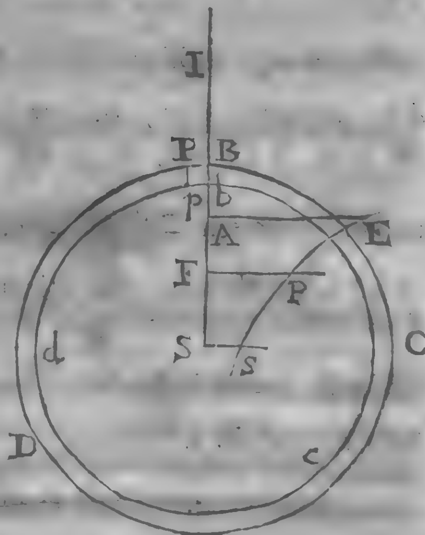
Vis Gravitatis eſt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum a Centro Terræ.

Demonſtratur hoc a priori inter *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

PROP.

PROP. XXVI. PROB. XXI.

Invenire Densitatem Atmosphæræ.



Sit S centrum Terræ, & per circulos BCD, *bcd* centro S descriptos, repræsententur superficies duæ sphæricæ ipsi Terræ concentricæ in Aere descriptæ. Tum superficies BCD sustinebit pressionem columnæ Aeris, cujus basis est eadem superficies atque altitudo æquatur altitudini BI totius Aeris supra punctum B: (per *Prop.* 20. *Lib.* 2. *Princip. Math.*) Pressio itaque in superficiei datam partem BP, est, ut columna Aeris totius altitudinis BI datæ basi insistentis. Sit itaq; bp = BP, atque erit differentia pressionum in bases BP & bp, ut pondus aeris datæ basi insistentis, inclusi inter altitudines SB & Sb. Sit itaque SB = x, atque imminutâ distantiâ Bb in infinitum, sit Bb = $\dot{x}$, & y densitas Aeris in B, & sit a data distantia a centro S, ad quam distantiam sit gravitas = 1 & densitas d. Tum quantitas aeris in spatio BPpb erit ut $\dot{x}y$ (nempe ut magnitudo in densitatem,) atque vis gravitatis in B erit $\frac{aa}{xx}$ (per *Hyp.* 2) adeoq; pondus aeris inter B & b erit ut $\frac{aa\dot{x}y}{xx}$. (hoc est, ut quantitas materiæ in gravitatem) Descendendo ergo versus centrum Terræ, crit incrementum pressionis ut $\frac{aa\dot{x}y}{xx}$.

D d Sed

Sed eſt denſitas y preſſioni proportionalis (per *Hypoth.* 1.) quare eſt $\dot{y}$ ut $\frac{a^2 \dot{x} y}{x^2}$. Sit ergo c linea data, atq; erit $\dot{y} = - \frac{a^2 \dot{x} y}{c x^2}$, ſeu $\frac{\dot{y}}{y} = - \frac{a^2 \dot{x}}{c x^2}$.

Sit $SA = a$ & $SF = \frac{aa}{x} = z$, atq; ad A & F erige normales ipſis d & y proportionales; quæ proinde per eas deſignari poſſunt, ut ſit $AE = d$, & $FP = y$, & ſit EP curva quam punctum P perpetuò tangit. Tum erit $\frac{-aa\dot{x}}{xx} = \dot{z}$, adeoq; $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{c}$. Unde eſt curva EP Logarithmica, cujus ſubtangens eſt c (per *Lem.* 11.) Adeoq; ſi in tabula Logarithmorum ſumantur Logarithmi proportionales ipſis AF, hoc eſt ipſis $a - \frac{aa}{x}$, Numeri erunt ut denſitates in locis B. *Q. E. I.*

SCHOLIUM.

Si Aeris totius pondus ſupra B ſit p (per hanc *Prop.*) erit p ad $\dot{p}$ ut y ad $\dot{y}$. Sed eſt $\dot{p} = \frac{aa\dot{x}y}{xx}$ (per hanc *Prop.*) Quare ſi ſit $p = \frac{aay}{xx}A$, hoc eſt, ſi p ſit columna Aeris ejuſdem denſitatis y & gravitatis $\frac{aa}{xx}$ ac Aer in B, & altitudinis A, erit y ad $\dot{y}$ ut A ad $\dot{x}$, hoc eſt, ut c ad $\frac{a^2 \dot{x}}{x^2}$ (per hanc *Prop.*) Unde ſit $c = \frac{aa}{xx}A$. Inventâ itaq; altitudine A per Experimentum *Torricellianum*, dabitur c.

Sed per Experimentum quoddam ab *Haukesbeio* factum, conſtat Aeris denſitatem mediocrem eſſe ad denſitatem Aquæ ut 1 ad 820 ferè.

ferè. Est etiam densitas Aquæ ad densitatem Mercurii ut 1 ad 13½. Quare est densitas Aeris ad densitatem Mercurii ut 1 ad 11070. Altitudo etiam Barometri mediocris est 30 *unc.* Quare si punctum B sumatur in superficie Terræ, existente *a* radio Terræ, erit altitudo A, (adeoq; subtangens *c*) = 332100 *unc.* vel 27675 *ped. Anglic.* Est etiam Radius Terræ pedum 20995444. Quare pro Radio Terræ scripto 1, erit $c = \frac{27675}{20995444}$, vel satis accurate in numeris minoribus $\frac{1}{760}$. Et hinc respectu Logarithmorum communium, in quibus est 1 *Log.* ipsius 10, est Pes Anglicanus partium 0.00001569

Mille passus Anglican.	0.082856 . .
Radius Terræ	329.47 . . . . .

Ex hac Propositione constat, Aeris densitatem, etiam ad distantiam infinitam a Centro Terræ, esse quantitatis finitæ; nam exponitur ea per Logarithmicæ ordinatam S*s* ad Centrum Terræ. Proinde si Aeris vis elastica tanta sit, ut ad hunc gradum raritatis pervento etiam adhuc sit densitas compressioni proportionalis, Atmosphæra Terræ vere in infinitum extendetur, atque erit quantitas Aeris in toto Systemate Mundano vere infinita; utpote quæ major sit quam totum spatium infinitum ductum in datam densitatem S*s*. Sed vires naturales non in infinitum extenduntur: quare plusquam probabile est, Aeris vim elasticam, postquam ad certum gradum raritatis perventum est, subinde continuò languescere, adeoque densitatem subinde decrescere in ratione continuò minori quam ponderis imminuti, atque Atmosphæram eo pacto revocari intra limites finitos, eosque fortasse satis arctos.

HYPOTHESIS III.

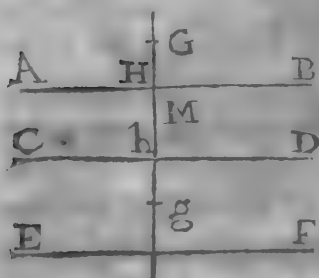
Radii Lucis constant ex particulis corporeis, atque Refractio Lucis fit per attractionem mutuam Lucis & Mediorum refringentium, atque hæc Attractio decrescit in tam magna ratione distantiarum a corporibus, ut non sit sensibilis, nisi in ipso ferè contactu; estque cæteris paribus, ut corporum densitas.

Hæc

Hæc omnia abunde comprobantur in Libro Opticorum *Newtoni.*

LEMMA XII.

Si sint Media plura similaria, planis parallelis ab invicem distincta, quorum vires attractrices sunt tantum in distantiis minimis sensibiles; corporis per Media ista transeuntis velocitas, ubi in Medium aliquod pervenerit, eadem erit, ac si per Media jam præterita non transiisset, sed cum primâ suâ velocitate directè incidisset in vires attractrices istius Medii, in quo jam versatur.



Distinguantur duo quævis Media contigua planis per rectas parallelas AB, CD, EF repræsentatis, atq; ducatur istis normalis GH*hg* occurrens AB & CD in H & *h*. Sume hinc inde HG & *hg* æquales distantiis in quibus incipit ac desinit attractio Medii ABDC. Tum quoniam Mediorum actio est uniformis, quantum motus additur corpori pergenti de G versus M, tantum aufertur per contrariam actionem ejusdem medii eodem perveniente in *g*; atque idem eveniet in transitu corporis per media reliqua. Restat ergò ut omnis mutatio motus ubi corpus pervenerit in *g*, oriatur ex solâ actione medii CDEF, in quo jam versatur.

COROLLARIUM.

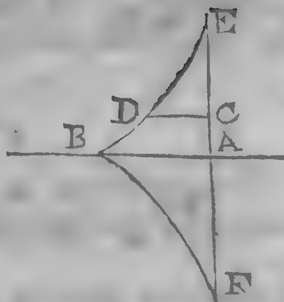
Hinc motus Lucis in Medio aliquo idem est, sive in illud primùm inciderit, sive per alia Media jam transierit, (per *Hypoth.* 3.)

LEMMA XIII.

Si in datis distantiis Mediorum Vires attractrices sunt ut ipsorum Densitates, erit Lucis velocitas in Medio in dimidiata ratione densitatis Medii quantitate data auctæ.

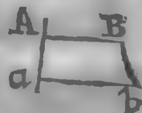
Sit

Sit AB superficies Medii jacentis ad partes F. Duc EAF ipsi AB normalem, atque ad punctum C in rectâ EA erige normalem CD proportionalem Medii vi attractrici in C, atq; sit EDBFE area tota quam describit ordinata CD. Tum erit incrementum quadrati velocitatis particulæ transeuntis per totam regionem attractionis Medii EF, ut spatium totum EDBF (per *Propp.* 39 & 40. *Lib.* I. *Princip. Math.*) Sed quoniam, ex hypothesi, Attractiones in datis distantiis sunt ut Densitates Mediorum, ergò sunt areæ integræ EDBFE ut eædem densitates; adeoque incrementum quadrati velocitatis est ut Medii densitas. Si itaque quadratum velocitatis datæ in vacuo, ante ingressum in spatium EF, sit ad incrementum ejusdem in transitu per hoc spatium, ut data quantitas ad densitatem in uno casu, erit semper quadratum velocitatis datæ in vacuo ad ejusmodi incrementum, ut idem Datum ad densitatem: adeoque conjunctim quadratum velocitatis post transitum per spatium EF erit ad quadratum velocitatis datæ in vacuo, ut densitas plus dato ad datum; & proinde ipsæ velocitates erunt in hâc ratione dimidiatâ; adeoque velocitas in Medio est semper in dimidiatâ ratione densitatis plus dato. *Q. E. D.*



COROLLARIUM.

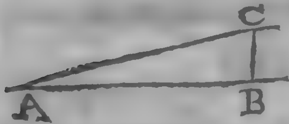
Hinc in transitu Lucis per Medium inæqualiter densum, qualis est Atmosphæra Terræ, Vis acceleratrix est ut fluxio densitatis applicata ad fluxionem distantiæ inter densitates. Nam sit *Aa* linea in cujus directione variatur densitas, & sint ordinatæ AB, *ab* ut vires acceleratrices in A & *a*, & sit B*b* curva quam describit punctum B. Tum erit area AB*ba* ut incrementum quadrati velocitatis particulæ pergentis de A in *a*, (per *Prop.* 39. *Lib.* I. *Princip. Math.*) hoc est, ut incre-



mentum densitatis (per hoc *Lemma*). Quare imminutâ distantiâ Aa in infinitum, erit vis acceleratrix AB ut fluxio densitatis applicata ad Aa, hoc est, ad fluxionem distantiæ inter densitates.

SCHOLIUM.

Per experientiam ab *Haukesbeio* factam, est sinus refractionis Radii Lucis a vacuo incidentis in Aerem ad superficiem Terræ, ad sinum incidentiæ ut 999736 ad 1000000. Ergo in hâc ratione est Lucis velocitas in vacuo ad ejusdem velocitatem in Aere ad superficiem Terræ. (per *Prop.* 95. *Lib.* I. *Princip. Math.*) Sit ergo 1 quantitas data, atque repræsentetur densitas Aeris ad superficiem Terræ per d: tum (per hoc *Lem.*) erit $1 : \sqrt{1+d} :: 999736 : 1000000$, adeoq; $d = 0.00052828$.



Et in genere, si Aeris densitas designetur per y, & constituatur triangulum rectangulum ABC, cujus basis AB sit ad hypothenusam AC, ut sinus refractionis ad sinum incidentiæ a vacuo, datâ basi AB erit perpendiculum BC ut $\sqrt{y}$.

PROP. XXVII. PROB. XXII.

Invenire Refractionem Lucis per Atmosphæram Terræ transeuntis.

Sit S Centrum Terræ, ABC Radius Lucis incurvatus, quem tangant rectæ AG; BG in A & B, sibi mutuo occurrentes in G, atque ad tangentes demittantur perpendiculares SD, SQ, & ducantur SA, SB; atque ad A ducatur ipsi SA normalis AE occurrens SD in E, & sit A punctum in Radio datum, B punctum variabile. Et sint $SA = a$, $SD = b$, $SE = t \left(= \frac{aa}{b},\right)$ $SB = x$, d densitas in A, y densitas in B.

Cur-

Curvatura Radii pendet ab Aeris vi refringente attractrice, (per *Hypoth.* 3) quæ semper dirigitur versus majorem densitatem, hoc est versus Centrum Terræ. (per *Prop.* 26.) Est ergo hæc Curva de generè Trajectoriarum genitarum per vires Centripetas.

Est autem velocitas Lucis in A ad velocitatem in B ut $\sqrt{1+d}$ ad $\sqrt{1+y}$ (per *Lem.* 13.) Quare est $SQ : SD :: \sqrt{1+d} : \sqrt{1+y}$ (per *Cor.* 1. *Prop.* 1. *Lib.* I. *Princ. Math.*) Unde est $SQ=\frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1+y}}b$, adeoque $BQ=\sqrt{x^2-\frac{1+d}{1+y}b^2}$. Et hinc, ubi punctum B est infinite distans, pœnè evanescente y, ita ut tutò negligi possit, erit perpendicularis ad tangentem jam factam Asymptoton, $=\sqrt{1+d}\times b$. Sit Asymptotos illa PH, occurrens tangentibus AG, BG in F & H, existente eidem perpendiculari SP.

Moveatur tangens BG in locum novum proximum bg occurrentem perpendiculari SQ in q. Tum erit angulus nascens gBG fluxio anguli FGH vel anguli FHG; hoc est, crescente x, incrementum anguli

guli

guli HGF & decrementum anguli FHG; ob datum angulum ad F. Atque radio existente 1, arcus proportionalis angulo nascenti QBq est $\frac{Qq}{QB}$. Est autem Qq fluxio ipsius SQ ($= \sqrt{\frac{1+d}{1+y}}\,b$): quare est $Qq = -\frac{1}{2}\dot{y}\frac{\sqrt{1+d}}{\overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}}$; hoc est $Qq = \frac{a^2 y \dot{x}\sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}}\,b$, (ob $\dot{y} = \frac{-a^2 y \dot{x}}{c x^2}$ per *Prop.* 26.) Unde fit $\frac{Qq}{QB}$, hoc est fluxio anguli

$$FGH = \frac{a^2 b y \dot{x}\sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \overline{1+y}|^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2 - \frac{1+d}{1+y}b^2}} \text{ vel } \frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \overline{1+y} \times \sqrt{\frac{1+y}{1+d}x^2 - b^2}}$$

Inventa itaque fluente hujus expressionis per Methodum Inversam Fluxionum, dabitur angulus FGB. Sed datur angulus GBS per valorem perpendicularis SQ, atq; est angulus SDG rectus; unde dabitur angulus DSB. Adeoq; ex datâ distantiâ SB ($=x$), densitate in B ($=y$), & angulo SAD, dabitur positio rectæ SB, adeoq; punctum B; hoc est, dabitur figura Radii refracti ABC. *Q. E. I.*

Sed hæc fluxio $\frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \overline{1+y}\cdot\sqrt{\frac{1+y}{1+d}x^2 - b^2}}$ ad fluentem in terminis numero finitis irreducibilis est. Quare ad computandam Atmosphæræ refractionem in usus Astronomicos, quærenda est series, quæ sit apta ad calculum instituendum per approximationes. Ergò ut fluxio hæc revocetur ad terminos quantum fieri potest simplicissimos, pro x scribe $\frac{aa}{z}$, atque fluxio fiet $\frac{-by\dot{z}}{2c \times \overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}\frac{a^4}{z^2} - b^2}}$, vel

$$\frac{-yz\dot{z}}{2c \times \overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}\frac{a^4}{b^2} - z^2}}, \text{ h. e. (neglecto signo) } \frac{yz\dot{z}}{2c \times \overline{1+y}\sqrt{\frac{1+y}{1+d}tt - zz}}$$

existente

existente etiam $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Sed ad superficiem Terræ, ubi est $y = d$, est hæc fluxio $\frac{yz\dot{z}}{2c + 2cd\sqrt{tt - zz}}$; & ad distantiam infinitam (ubi etiam fluxio ipsi evanescit,) differt ab hac forma minus parte millesimâ. Quare neglectis istiusmodi minutiis, pro Fluxione illa tutò sumi potest $\frac{yz\dot{z}}{2c + 2cd\sqrt{tt - zz}}$. Seposito itaque coefficiente dato $\frac{1}{2c + 2cd}$, fluentem ipsius $\frac{yz\dot{z}}{\sqrt{tt - zz}}$ quæro ope Propositionis undecimæ, ut sequitur.

Pro $\sqrt{tt - zz}$ scribe x, atque erit $\dot{x} = \frac{-z\dot{z}}{x}$, & Fluxio proposita erit $\frac{yz\dot{z}}{x}$ vel etiam $-y\dot{x}$. Est etiam $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Itaque secundùm *Prop.* 11. sit $r = yz$, $s = \frac{z}{x}$, $\dot{w} = \dot{z} = \frac{-x\dot{x}}{z}$. Tum capiendo fluxiones, easque continuò applicando ad $\dot{w}$, erit $\dot{s} = \frac{z^2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{tt}{x^3}$, $\ddot{s} = \frac{3z^3}{x^5} + \frac{3z}{x^3} = \frac{3ttz}{x^5}$, $\dddot{s} = \frac{15z^4}{x^7} + \frac{18z^2}{x^5} + \frac{3}{x^3} = \frac{15ttz^2}{x^7} + \frac{3tt}{x^5}$, & sic porrò. Hinc autem per formationes terminorum constat, quod si sit n distantia termini alicujus $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. a termino primo s, exprimetur $\overset{n}{s}$, (hoc est $\dot{s}$, si n sit 1, $\ddot{s}$ si n sit 2, &c.) vel per seriem hujus formæ,

$$\overset{n}{s} = A\frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + B\frac{z^{n-1}}{x^{2n-1}} + C\frac{z^{n-3}}{x^{2n-3}} + D\frac{z^{n-5}}{x^{2n-5}} + \&c.$$

vel per ſeriem hujus formæ,

$\overset{n}{s} = tt \times A \frac{z^{n-1}}{x^{2n+1}} + B \frac{z^{n-3}}{x^{2n-1}} + C \frac{z^{n-5}}{x^{2n-3}} + \&c.$ Coefficentes autem A, B, C, D, &c. in harum ſerierum primâ inveſtigo ad hunc modum. Juxta notationem autem noſtram ſint $\dot{n}, \ddot{n}, \dddot{n}$, &c. valores ipſius n præcedentes, & $n_{\prime}, n_{\prime\prime}, n_{\prime\prime\prime}$, &c. ejuſdem valores ſubſequentes, ut in Introductione explicavimus. Capiendo fluxiones ſeriei, primò in x, deinde in z, & terminos prodeuntes continuo applicando ad $\dot{w}$, erit,

$$\overset{n}{\dot{s}} = \overline{2n+1}\, A \frac{z_{\prime}^{n+1}}{x_{\prime}^{2n+1}} + \left.\begin{matrix} \overline{2n-1}\, B \\ +\, \overline{n+1}\, A \end{matrix}\right\} \frac{z_{\prime}^{n-1}}{x_{\prime}^{2n-1}} + \left.\begin{matrix} \overline{2n-3}\, C \\ +\, \overline{n-1}\, B \end{matrix}\right\} \frac{z_{\prime}^{n-3}}{x_{\prime}^{2n-3}} + $$

$$+ \left.\begin{matrix} \overline{2n-5}\, D \\ +\, \overline{n-3}\, C \end{matrix}\right\} \frac{z_{\prime}^{n-5}}{x_{\prime}^{2n-5}} + \&c.$$

Hinc novum A fit $\overline{2n+1}\,A$. Unde conſtat ipſum A formari per continuam multiplicationem terminorum 1, 3, 5, 7, &c. quorum ultimus & maximus ſit $2n-1$. In ſequentibus autem vice $2n-1$ ſcribe m, atque erit $A_{\prime} = m_{\prime}A$.

Item per terminum ſecundum eſt $B_{\prime} = mB + n_{\prime}A$. Si fieri poteſt ut B producatur ab A per multiplicationem & diviſionem, ſit $B = \frac{Q}{R} A$. Tum erit $B_{\prime} = \frac{Q_{\prime}}{R_{\prime}} A_{\prime} = \frac{Q_{\prime}}{R_{\prime}} m_{\prime} A$. Unde eliminatis B & $B_{\prime}$ ab æquatione priori, & ſimul evaneſcente A, erit $\frac{m_{\prime} Q_{\prime}}{R_{\prime}} = \frac{mQ}{R} + n_{\prime}$, hoc eſt $\frac{mQ_{\prime}}{R_{\prime}} + \frac{mQ_{\prime}}{R_{\prime}} = \frac{mQ}{R} + n_{\prime}$. Ut reducetur hæc

æquatio

æquatio ad terminos simplicissimos pono $\frac{m_{,}Q}{R_{,}} = \frac{mQ}{R}$, hoc est $\frac{m_{,}}{R_{,}} = \frac{m}{R}$. Unde fit $\frac{m_{,}}{R_{,}}\dot{Q} = \dot{n}_{,}$. Sed est $\frac{m_{,}}{R_{,}}$ novus valor ipsius $\frac{m}{R}$, unde est $\frac{m}{R}$ quantitas data, adeoque $R = m$, indeque $\dot{Q} = \dot{n}_{,}$, & sumendo integrales $Q = \frac{n_{,}n}{2} + p$. Sed debet esse $B = 0$ ubi $n = 0$; adeoq; est $p = 0$, atque $Q = \frac{n_{,}n}{2}$. Unde fit $B = \frac{n_{,}n}{2m}A$. Et hinc $B_{,} = \frac{m n_{''}}{n}B$.

Per terminum tertium est $\dot{C} = \dot{m}C + \dot{n}B$. Pono $C = \frac{Q}{R}B$, & fit $C_{,} = \frac{Q_{,}}{R_{,}}B_{,}$, hoc est $\frac{Q_{,} m n_{''}}{R_{,} n}B = \frac{\dot{m}Q}{R}B + \dot{n}B$, seu $\frac{Q m n_{''}}{n R_{,}} + \frac{m n_{''}}{n R}\dot{Q} = \frac{\dot{m}Q}{R} + \dot{n}$. Pone $\frac{m n_{''}}{n R_{,}} = \frac{\dot{m}}{R}$, hoc est, $\frac{m n_{''} n_{,}}{R_{,}} = \frac{\dot{m} n n_{,}}{R}$, ut fiat $\frac{m n_{''}}{n R}\dot{Q} = \dot{n}$. Sed est $\frac{m n_{''} n_{,}}{R_{,}}$ novus valor ipsius $\frac{\dot{m} n n_{,}}{R}$. Unde fit $R = \dot{m} n_{,} n$, adeoq; $\dot{Q} = n_{,} \dot{n} \dot{n}$, indeq; $Q = \frac{n_{,} n \dot{n} \ddot{n}}{4}$. Unde fit $C = \frac{\dot{n}\ddot{n}}{4m}B$, atque $C_{,} = \frac{m n_{''}}{\ddot{n}}C$.

Per

Per terminum quartum eſt $\underset{,}{D} = \overset{''}{m}\,D + \overset{'''}{n}\,C$. Unde ad eundem modum invenitur $D = \frac{\overset{'''}{n}\,\overset{''''}{n}}{6\overset{''}{m}}\,C$, atque $\underset{,}{D} = \frac{\overset{''}{m}\,n\;\overset{''}{\cdot}}{\overset{'''}{n}}$. Ex terminis autem jam appoſitis ſatis conſtat modus formandi cæteros. Unde ſi jam pro totis terminis cum ſuis ſignis ſcribantur A, B, C, &c. erit

$$\overset{n}{s} = \overline{1.3.5\ldots 2n-1}\,\frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + \frac{\overset{,}{n}\,n}{2m}\,\frac{xx}{zz}\,A + \frac{\overset{'}{n}\,\overset{''}{n}}{4\overset{'}{m}}\,\frac{xx}{zz}\,B + \&c.$$

hoc eſt $$\overset{n}{s} = \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}\;z^{n+1}}{x^{2n+1}} + \frac{\overline{n+1}.n}{2\times\overline{2n-1}}\cdot\frac{xx}{zz}\,A + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{4\times\overline{2n-3}}\times\frac{xx}{zz}\,B + \frac{\overline{n-3}.\overline{n-4}}{6\times\overline{2n-5}}\cdot\frac{xx}{zz}\,C + \&c.$$

Et ad eundem modum inveniuntur coefficientes in ſerie alterâ, ut ſit etiam $$\overset{n}{s} = \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}\;tt\,z^{n-1}}{x^{2n+1}} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2\times\overline{2n-1}}\,\frac{xx}{zz}\,A + \frac{\overline{n-3}.\overline{n-4}}{4\times\overline{2n-3}}\,\frac{xx}{zz}\,B + \frac{\overline{n-5}.\overline{n-6}}{6\times\overline{2n-5}}\,\frac{xx}{zz}\,C + \&c.$$

Quinetiam ſi jam ſit m diſtantia termini alicujus s, $\overset{'}{s}$, $\overset{''}{s}$, &c. a termino s, pro n ſcripto $-m$ exprimetur etiam $\overset{m}{\underset{\cdot\cdot}{s}}$ per eaſdem ſeries. In hoc autem caſu inveniendus eſt coefficiens termini primi, ut fecimus in Propoſitione duodecimâ. Debet enim eſſe $2n-1$, hoc eſt $-2m-1$, maximus factorum 1, 3, 5, 7, &c. in coefficiente iſto. Et hic coefficiens ſic ſcribi poteſt $\frac{\overline{2n-1}\ldots 5.3.1.-1.-3.-5.\&c.}{-1.-3.-5.\&c.}$ hoc eſt, $\frac{\overline{-2m-1}.\overline{-2m-3}.\overline{-2m-5}.\&c.}{-1.-3.-5.-7.\&c.}$. Incidente autem n inter numeros negativos, adeoq; & m inter numeros affirmativos 1, 2, 3, &c. omnes

omnes factores $-2m-1$, $-2m-3$, $-2m-5$. &c. in numeratore tolluntur per similes factores in denominatore. Unde relinquitur ut in isto casu sit coefficiens termini primi $\frac{1}{-1.-3.-5....-2m-1}$, atq; fit $\overset{m}{s} = \frac{z^{-m+1}}{-1.-3.-5.-\overline{2m+1}\; x^{-2m+1}} +$ $+ \frac{\overline{-m+1}.-m}{2.-\overline{2m-1}} \frac{xx}{zz} A + \frac{\overline{-m-1}.\overline{-m-2}.}{4.-\overline{2m-3}} \frac{xx}{zz} B$ &c. vel $\overset{m}{s} = \frac{x^{2m-1}}{-1.-3.-5...-\overline{2m+1}.\; z^{m-1}} + \frac{-\overline{m+1}.\, m}{2.\,\overline{2m+1}} \frac{xx}{zz} A +$ $+ \frac{-\overline{m-1}.\,\overline{m+2}.}{4.\,\overline{2m+3}.} \frac{xx}{zz} B + \frac{-\overline{m-3}.\,\overline{m+4}.}{6.\,\overline{2m+5}} \frac{xx}{zz} C +$ &c. hoc est per seriem priorem. Et hæc series quidem est præstantior ad inveniendas fluentes $\acute{s}, \acute{\acute{s}}, \acute{\acute{\acute{s}}}$, &c. altera autem ad inveniendas fluxiones $\dot{s}, \ddot{s}, \dddot{s}$, &c.

Porrò est $\dot{r} = y\dot{z}$, atque $\dot{y} = \frac{y\dot{z}}{c}$. Unde sumendo fluentes purè fit $r = cy$, $\acute{r} = c^2 y$, $\acute{\acute{r}} = c^3 y$, &c. item sumendo fluxiones, $\dot{r} = y$, $\ddot{r} = \frac{y}{c}$, $\dddot{r} = \frac{y}{c^2}$, &c. Unde observatis signis, per hos valores ipsorum $\dot{s}, \ddot{s}, \dddot{s}$, &c. $\acute{s}, \acute{\acute{s}}, \acute{\acute{\acute{s}}}$, &c. $r, \acute{r}, \acute{\acute{r}}$, &c. $\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}$, &c. fit angulus FHG $\left(= \frac{1}{2c+2cd} \times \overline{r\dot{s} - \acute{r}\ddot{s} + \acute{\acute{r}}\dddot{s} - \text{\&c.}}\right) = \frac{1}{2c+2cd}$ in hanc seriem,

$$\left\{\begin{array}{l} cy \times \frac{z}{x} \\ -c^2 y \times \frac{tt}{x^3} \\ c^3 y \times \frac{3ttz}{x^5} \\ -c^4 y \times \overline{\frac{1.3.5\,ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5} \frac{x^2}{z^2} A} \\ \text{\&c.} \end{array}\right.$$

 atque

atque angulus FGH $\left(\frac{1}{2c+2cd} \times -\dot{r}\overset{\prime}{s} + \ddot{r}\overset{\prime\prime}{s} - \dddot{r}\overset{\prime\prime\prime}{s} \text{ \&c. } - P\right)$ æqualis $\frac{1}{2c+2cd}$ in hanc feriem

$$\left\{\begin{array}{l} y \times x \text{ [illegible]} \\ \frac{y}{c} \times \frac{x^3}{1.3z} + \frac{-1}{5}\frac{x^2}{z^2}A + \frac{-3}{7}\frac{x^2}{z^2}B + \text{\&c.} \\ \frac{y}{c^2} \times \frac{x^5}{1.3.5z^2} + \frac{-3}{7}\frac{x^2}{z^2}A + \frac{-5}{9}\frac{x^2}{z^2}B + \text{\&c.} \\ \text{\&c.} - P \end{array}\right.$$

Ubi eft P valor ejufdem Seriei prodiens per ipforum z, x, y valores in puncto A.

Poteft etiam alia feries inveniri pro angulo FGH; nempe ita corrigendo Fluentes r, $\overset{\prime}{r}$, $\overset{\prime\prime}{r}$, &c. ut omnes evanefcant in puncto A, ubi eft $z = a$. Ut hoc fiat pone $z = a - v$, unde fit $\dot{z} = -\dot{v}$, & fluxio anguli FHG fit $\frac{\dot{v}yz}{x}$ in $\frac{1}{2c+2cd}$. Pofito itaq; $s = \frac{z}{x}$ (ut prius) erit $\dot{r} = \dot{v}y$, exiftente $\dot{w} = -\dot{v}$, atq; $\dot{y} = \frac{-\dot{v}y}{c}$. Unde fit $\dot{r} = -c\dot{y}$, adeoque $r = cd - cy$, (quoniam eft d valor ipfius y in puncto A,) indeque $r\dot{w} = -cd\dot{v} + cy\dot{v} = -cd\dot{v} - c^2\dot{y}$, adeoq; $\overset{\prime}{r} = c^2d - cdv - c^2y$, & inde $\overset{\prime\prime}{r} = c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y$, $\overset{\prime\prime\prime}{r} = c^4d - c^3dv + \frac{c^2dv^2}{2} - \frac{cdv^3}{2.3} - c^4y$, & fic porrò. Unde fit angulus FGH æqualis $\frac{1}{2c+2cd}$ in

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{cd - cy} \times \frac{z}{x} \\ -\overline{c^2d + cdv + c^2y} \times \frac{tt}{x^3} \\ \overline{c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y} \times \frac{3ttz}{x^5} \\ \overline{-c^4d + c^3dv - \frac{c^2dv^2}{2} + \frac{cdv^3}{2.3} + c^4y} \times \overline{\frac{1.3.5\,ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5}\frac{x^2}{z^2}A} \\ \text{\&c.} \end{array}\right.$$

Et

Et hinc fit summa angulorum FHG, FGH, hoc eſt angulus GFH æqualis $\frac{1}{2c + 2cd}$ in

$$\left\{ \begin{array}{l} c d \times \frac{z}{x} \\ - \overline{c^2 d + c d v} \times \frac{t t}{x^3} \\ \overline{c^3 d - c^2 d v + \frac{c d v^2}{2}} \times \frac{3 t t z}{x^5} \\ - \overline{c^4 d + c^3 d v - \frac{c^2 d v^2}{2} + \frac{c d v^3}{2.6}} \times \overline{\frac{1.3.5 t t z^2}{x^7} + \frac{1}{5} \frac{x^2}{z^2} A}. \end{array} \right.$$

Ubi angulus SAD eſt ſatis parvus, commodè invenitur angulus GFH per hanc ſeriem. Sed ubi eſt angulus SAD nimis magnus, quærendus eſt angulus FGH per ſeriem alteram.

Poteſt & alia ſeries inveniri pro angulo FGH, per Propoſitionem ſeptimam. Sit enim Q fluens ipſius $\frac{-z z \dot{y}}{x}$, hoc eſt ipſius $\dot{x} y$. Tum per Propoſitionem illam, quo tempore x fit $x \pm v$, fiet Q $= Q \pm \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 \pm \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ nempe fluente uniformiter x. Unde ſi pro x ſumatur ipſius valor in puncto aliquo [illegible]to I, & ſit $x - v$ ejuſdem valor in A, & $x + v$ ejuſdem valor [illegible] α, valor fluentis in puncto A erit $Q + \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 + \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ & valor fluentis in puncto α erit $Q - \frac{\dot{Q}}{\dot{x}} v + \frac{\ddot{Q}}{2\dot{x}^2} v^2 - \frac{\dddot{Q}}{2.3\dot{x}^3} v^3 + \&c.$ Quo valore dempto a valore altero, reſiduum erit Fluentis pars adjacens rectæ $A\alpha$; adeoq; ſi ſit $SB = \frac{SA^2}{S\alpha}$, erit angulus

angulus FGH $= \frac{1}{c + cd} \times \overline{\frac{\dot{Q}}{x} v * \pm \frac{\ddot{Q}}{2.3x^3} v^3 * + \frac{\dddot{Q} v^5}{2.3.4.5x^5}}$ + &c. In hoc casu autem pro x scripto 1, est $z = \frac{x}{z}$, & $\dot{y} = \frac{-xv}{cz}$. Unde existente $Q = y$, fiunt $\dot{Q} = \frac{y}{cz^2} \times \overline{\frac{x^2}{c} - \frac{tt}{z}}$; $\ddot{Q} = \frac{y}{c^2 z^4} \times \overline{\frac{x^4}{cc} - \frac{6ttx^2}{cz} + \frac{3tt}{z} \times \overline{z - c} \times \frac{1 + 5x^2}{z^2}}$; &c.

SCHOLIUM.

In hâc Curvâ Radius Curvaturæ est $\frac{\overline{2 + 2y} \times c \times SB\ cub.}{y \times SQ \times SA\ quad.}$; quod in puncto A est $\frac{\overline{2 + 2d} \times c \times SA}{d \times SD}$; & ubi angulus SAD est rectus, est $\frac{\overline{2 + 2d}}{d} c$. Quod per valores c & d (*Schol. Prop.* 26. & *Schol. Lem.* 12.) est 5 SA, circiter, existente SA Radio Terræ. Proinde curvatura Radii Luminis horizontalis, ad superficiem Terræ, est ad curvaturam Circuli maximi Terræ, ut 1 ad 5. Velocitas autem Luminis est ad velocitatem Corporis revolventis in Circulo maximo Terræ, cum vi Gravitatis, circiter ut 40000 ad 1. Unde est Aeris vis refringens ad vim Gravitatis in superficie Terræ circiter ut 320000000 ad 1. Nam in datâ inclinatione Trajectoriarum ad directionem Virium centripetarum, Vires illæ sunt in ratione compositâ Flexurarum & quadratorum Velocitatum.

FINIS.





